

ESCOLA DE COMÉRCIO ÁLVARES PENTEADO -

FECAP

MESTRADO EM CIÊNCIAS CONTÁBEIS

ANTONIO AURELIO DUARTE

**A ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS E SEU
IMPACTO NO TESTE DE ADEQUAÇÃO DE PASSIVO**

São Paulo

2013

**FUNDAÇÃO ESCOLA DE COMÉRCIO ÁLVARES PENTEADO -
FECAP**

MESTRADO EM CIÊNCIAS CONTÁBEIS

ANTONIO AURELIO DUARTE

**A ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS E SEU IMPACTO NO
TESTE DE ADEQUAÇÃO DE PASSIVO**

Dissertação apresentada à Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado – FECAP, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências Contábeis.

Orientador: Prof. Dr. Aldy Fernandes da Silva

São Paulo

2013

FUNDAÇÃO ESCOLA DE COMÉRCIO ÁLVARES PENTEADO – FECAP

Reitor: Prof. Edison Simoni da Silva

Pró-reitor de Graduação: Prof. Dr. Ary Rocco

Pró-reitor de Pós-graduação: Prof. Edison Simoni da Silva

Coordenador de Mestrado em Ciências Contábeis: Prof. Dr. Cláudio Parisi

FICHA CATALOGRÁFICA

D812e	Duarte, Antonio Aurelio
	A estrutura a termo da taxa de juros e seu impacto no teste de adequação de passivo / Antonio Aurelio Duarte. - - São Paulo, 2013.
	117 f.
	Orientador: Prof. Dr. Aldy Fernandes da Silva.
	Dissertação (mestrado) – Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado - FECAP - Mestrado em Ciências Contábeis.
	1. Taxas de juros 2. Seguros - Contabilidade 3. Seguros - Legislação 4. International financial reporting standards.
	CDD 657.836

FOLHA DE APROVAÇÃO

ANTONIO AURELIO DUARTE

**A ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS E SEU IMPACTO NO TESTE DE
ADEQUAÇÃO DE PASSIVO**

**Dissertação apresentada à Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado - FECAP,
como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências Contábeis.**

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Luciano Vereda Oliveira
Universidade Federal Fluminense - UFF

Prof. Dr. Cláudio Parisi
Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado – FECAP

Prof. Dr. Aldy Fernandes da Silva
Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado – FECAP
Professor Orientador – Presidente da Banca Examinadora

São Paulo, 7 de junho de 2013.

Para Márcia e Eduardo

AGRADECIMENTOS

A conclusão de uma dissertação exige do mestrando muita dedicação e, pela própria natureza do tempo, é inevitável que as horas aqui empenhadas tivessem que ser confiscadas de outro lugar. Assim, começo agradecendo a meus maiores credores Márcia e Eduardo, pelo tempo excessivo que gentilmente me cederam e por tudo que significam para mim.

Por mais esforço que o mestrando tenha empregado na conclusão de sua dissertação, ela simplesmente não existiria sem a colaboração de pessoas que acreditaram na viabilidade do projeto. Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, tornaram possível este trabalho. Particularmente:

Agradeço meu orientador e professor Aldy Fernandes da Silva pelo seu incentivo para que eu entrasse no programa de mestrado e por seu apoio neste projeto.

Agradeço ao professor Luciano Vereda Oliveira da Universidade Federal Fluminense pelas dicas valiosas que me ajudaram a concluir este trabalho.

Agradeço à FECAP, nas pessoas de seus professores e funcionários, e a meus colegas de classe pelo ambiente que estimula o debate intelectual e o desenvolvimento de um trabalho desta natureza.

Agradeço aos colegas do Departamento Atuarial da Itaú Seguros pelo suporte que me deram ao longo de todo o curso, em especial à Marina e Thalita pela revisão deste documento.

Agradeço à Itaú Seguros pelo apoio financeiro que me foi oferecido.

"The best way to predict the future is to create it."

Peter F. Drucker

RESUMO

Com a publicação do IFRS 4, ficou estabelecido que as Companhias Seguradoras devem submeter suas Provisões Técnicas ao Teste de Adequação de Passivo – TAP. A regulamentação brasileira para este teste exige que a Estimativa Corrente seja descontada por uma Estrutura a Termo da Taxa de Juros – ETTJ. Como a literatura especializada oferece diversas metodologias para sua construção, será necessário optar por uma delas e, dessa forma, condicionar o resultado do TAP à sua aplicação. Este trabalho tem como objetivo geral discutir e aplicar a técnica de interpolação por *Spline* Cúbico, o modelo paramétrico de Svensson e o modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek na construção da ETTJ que será utilizada para descontar a Estimativa Corrente das obrigações decorrentes dos contratos de seguros com cobertura por sobrevivência. Como objetivo específico, deseja-se conhecer e analisar a magnitude das diferenças encontradas nos resultados do TAP decorrente da utilização de diferentes modelos de ETTJ. As taxas negociadas nos pregões da BM&FBOVESPA serão utilizadas para estimação dos parâmetros que caracterizam cada um dos modelos apresentados. Por fim, fluxos de caixa hipotéticos e observados (caso prático de uma Seguradora) serão utilizados para performar os testes de robustez. Os resultados indicam que: 1) O resultado do Teste de Adequação de Passivo é sensível à escolha do modelo utilizado na construção da ETTJ; 2) Esta sensibilidade aumenta com a longevidade do fluxo de caixa, na medida em que a Estimativa Corrente é sensível ao prazo médio dos pagamentos inerentes ao fluxo; 3) O TAP é um valor incerto no tempo, dado que a ETTJ depende dos fatores macroeconômicos vigentes na data de sua construção; 4) A adoção de uma taxa a termo de longuíssimo prazo (UFR) para o mercado segurador brasileiro deveria ser avaliada pelo regulador.

Palavras-chave: Estrutura a termo da taxa de juros. Teste de adequação do passivo. Provisões técnicas. IFRS 4.

ABSTRACT

With the publication of IFRS 4, it was established that the Insurance Enterprises should submit their Technical Reserves to the Liability Adequacy Test - LAT. The Brazilian regulation for this test requires that the Current Estimate is discounted by a Term Structure of Interest Rates-TSIR. As the literature offers several methods for its construction, it will be necessary to choose among them and this condition the result of the LAT application. This paper aims to discuss and apply the interpolation technique by Cubic Spline, the parametric model of Svensson and the one-factor equilibrium model of Vasicek, the construction of TSIR which will be used to discount the Current Estimates of future cash flows under insurance contracts of life-contingent annuities and pensions. As a specific goal, we want to know and analyze the magnitude of the differences found in the results of the LAT from the use of different TSIR models. Rates traded on BM&FBOVESPA will be used to estimate the parameters that characterize each of the models presented. Finally, cash flows hypothetical and observed (Insurer practical case) will be used to perform robustness tests. The results indicate that: 1) The result of Liability Adequacy Test is sensitive to the choice of the model used in the construction of TSIR; 2) The sensitivity increases with the longevity of cash flow, to the extent that the current estimate is sensitive to average term of cash flow; 3) The LAT is an uncertain value in time, as TSIR depends on the macroeconomic factors prevailing at the time of its construction; 4) The adoption of an ultimate forward rate (UFR) for the Brazilian insurance market should be evaluated by the supervisor.

Key-words: Term structure of interest rates. Liability adequacy test. Technical reserves. IFRS

4.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Formato da Curva de Juros	43
FIGURA 2 – Movimentação da Curva de Juros	44
FIGURA 3 – Relação entre taxa <i>spot</i> e taxa <i>forward</i> na Teoria das Expectativas Puras	47
FIGURA 4 – Representação gráfica para Teoria da Segmentação do Mercado	51
FIGURA 5 – Estimativa Corrente - Data Ref. 29/06/2012 - Fluxo Teórico - Cupom IPCA	99
FIGURA 6 – Estimativa Corrente - Data Ref. 29/12/2011 - Fluxo de Caixa - Cupom IPCA	99
FIGURA 7 – Estimativa Corrente - Data Ref. 30/06/2011 - Fluxo de Caixa Cupom IPCA.....	99

LISTA DE TABELAS

TABELA 1– Provisionamento Técnico feito pelo Mercado Segurador em 12/2012.....	27
TABELA 2 – Base de Dados para Modelagem Dinâmica - Cupom IPCA.....	76
TABELA 3 – Base de Dados para Modelagem Dinâmica - Cupom IGPM.....	77
TABELA 4 – Parâmetros estimados para o modelo paramétrico de Svensson.....	80
TABELA 5 – Taxa de curto prazo (maturidade de um mês) corrente (taxa de partida)	85
TABELA 6 – Parâmetros estimados para o modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek.....	85
TABELA 7 – Estimativa Corrente - Fluxo de Caixa Teórico - Cupom IPCA.....	101
TABELA 8 – Estimativa Corrente - Fluxo Observado - 29/12/2011 - Cupom IGPM.....	104
TABELA 9 – TAP - Fluxo Observado - 29/12/2011 - Cupom IGPM	105

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – Codificação das ETTJ's Ajustadas	78
QUADRO 2 – Taxas para as últimas maturidades da curva de juros observada	81
QUADRO 3 – Ultimate Forward Rate (UFR) adotado em CEIOPS (2010).....	109

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – Representação gráfica da função sobrevivência $s(x)$	29
GRÁFICO 2 – Representação gráfica da ETTJ em três dimensões	45
GRÁFICO 3 – Movimentação das taxas de juros no tempo	46
GRÁFICO 4 – Representação gráfica para as cargas (<i>loadings</i>) do modelo Nelson-Siegel.....	55
GRÁFICO 5 – Representação gráfica para as cargas (<i>loadings</i>) do modelo Svensson	58
GRÁFICO 6 – Simulação da taxa instantânea de juros de curto prazo (r)	67
GRÁFICO 7 – Distribuição de Probabilidade de r_{∞}	69
GRÁFICO 8 – Visualização da Base de Dados para Modelagem <i>Cross-Section</i>	75
GRÁFICO 9 – Visualização da Base de Dados Cupom IPCA para Modelagem Dinâmica.....	76
GRÁFICO 10 – Visualização da Base de Dados Cupom IGPM para Modelagem Dinâmica	77
GRÁFICO 11 – Perfil do processo recursivo de Vasicek - Cupom IPCA	84
GRÁFICO 12 – Perfil do processo recursivo de Vasicek - Cupom IGPM.....	84
GRÁFICO 13 – Comparação das curvas estimadas e observada - IPCA em 29/06/2012	86
GRÁFICO 14 – Comparação das curvas estimadas e observada - IGPM em 29/06/2012	87
GRÁFICO 15 – Comparação das curvas estimadas e observada - IPCA em 29/12/2011	87
GRÁFICO 16 – Comparação das curvas estimadas e observada - IGPM em 29/12/2011	88
GRÁFICO 17 – Comparação das curvas estimadas e observada - IPCA em 30/06/2011	88
GRÁFICO 18 – Comparação das curvas estimadas e observada - IGPM em 30/06/2011	89
GRÁFICO 19 – Comparação das curvas estimadas para cupom IPCA em 29/06/2012.....	90
GRÁFICO 20 – Comparação das curvas estimadas para cupom IGPM em 29/06/2012.....	91
GRÁFICO 21 – Comparação das curvas estimadas para cupom IPCA em 29/12/2011.....	91
GRÁFICO 22 – Comparação das curvas estimadas para cupom IGPM em 29/12/2011	92
GRÁFICO 23 – Comparação das curvas estimadas para cupom IPCA em 30/06/2011.....	92
GRÁFICO 24 – Comparação das curvas estimadas para cupom IGPM em 30/06/2011	93

GRÁFICO 25 – Fluxo de Caixa Teórico 1 (carteira hipotética)	95
GRÁFICO 26 – Fluxo de Caixa Teórico 2 (carteira hipotética)	95
GRÁFICO 27 – Fluxo de Caixa Teórico 3 (carteira hipotética)	96
GRÁFICO 28 – Fluxo de Caixa Teórico 4 (carteira hipotética)	96
GRÁFICO 29 – Fluxo de Caixa Observado 1 (carteira real)	97
GRÁFICO 30 – Fluxo de Caixa Observado 2 (carteira real)	98
GRÁFICO 31 – Comparação das curvas de juros estima por Svensson - IGPM.....	106
GRÁFICO 32 – Comparação das curvas de juros estima por Spline Cúbico - IGPM	106
GRÁFICO 33 – Comparação das curvas de juros estima por Vasicek - IGPM.....	107

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BM&FBOVESPA	Bolsa de Mercadorias e Futuros
CPC	Comitê de Pronunciamentos Contábeis
EIOPA	<i>European Insurance and Occupational Pensions Authority</i>
ETTJ	Estrutura a Termo da Taxa de Juros
IASB	<i>International Accounting Standards Board</i>
IFRS	<i>International Financial Reporting Standards</i>
IGPM	Índice Geral de Preços do Mercado
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
LTN	Letras do Tesouro Nacional
NCA	<i>Net Carrying Amount</i>
NTN	Notas do Tesouro Nacional
PDA	Provisão para Despesas Administrativas
PEF	Provisão de Excedentes Financeiros
PIC	Provisão de Insuficiência de Contribuições
PGBL	Plano Gerador de Benefícios Livre
PMBaC	Provisão Matemática de Benefícios a Conceder
PMBC	Provisão Matemática de Benefícios Concedidos
SELIC	Sistema Especial de Liquidação e de Custódia
SUSEP	Superintendência de Seguros Privados
TAP	Teste de Adequação do Passivo
VGBL	Vida Gerador de Benefícios Livre
UFR	<i>Ultimate Forward Rate</i>

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 JUSTIFICATIVA.....	20
1.2 SITUAÇÃO PROBLEMA.....	20
1.3 OBJETIVO E CONTRIBUIÇÃO	22
2 TESTE DE ADEQUAÇÃO DE PASSIVO – TAP	23
2.1 DELIMITAÇÃO	23
2.2 PROVISÕES TÉCNICAS.....	24
2.3 PROVISÕES TÉCNICAS DE SOBREVIVÊNCIA	26
2.4 ESTIMATIVA CORRENTE	35
3 ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS – ETTJ	37
3.1 FORMATO E MOVIMENTAÇÃO DA ETTJ	42
3.2 TEORIAS ECONÔMICAS SOBRE A ETTJ	45
3.2.1 TEORIA DAS EXPECTATIVAS PURAS	46
3.2.2 TEORIA DA LIQUIDEZ	48
3.2.3 TEORIA PELO HABITAT PREFERIDO.....	49
3.2.4 TEORIA DA SEGMENTAÇÃO DO MERCADO	50
3.3 MODELOS PARA CONSTRUÇÃO DA ETTJ	51
3.3.1 MODELO PARAMÉTRICO DE SVENSSON	54
3.3.2 TÉCNICA DE INTERPOLAÇÃO POR <i>SPLINE</i> CÚBICO	60
3.3.3 MODELO DE EQUILÍBRIO UNIFATORIAL DE VASICEK	63
4 METODOLOGIA DA PESQUISA	72
4.1 BASE DE DADOS PARA CONSTRUÇÃO DA ETTJ	73
5 RESULTADOS	78
5.1 ESTRUTURA A TERMO DA TAXAS DE JUROS (ETTJ) AJUSTADA	78
5.1.1 MODELO PARAMÉTRICO DE SVENSSON	78
5.1.2 TÉCNICA DE INTERPOLAÇÃO POR <i>SPLINE</i> CÚBICO	81
5.1.3 MODELO DE EQUILÍBRIO UNIFATORIAL DE VASICEK	82

5.1.4 CURVAS AJUSTADAS	85
5.2 FLUXOS DE CAIXA	93
5.3 ESTIMATIVA CORRENTE DOS FLUXOS DE CAIXA TEÓRICOS	98
5.4 TESTE DE ADEQUAÇÃO DE PASSIVO DOS FLUXOS DE CAIXA OBSERVADOS	102
5.5 IMPLICAÇÃO PRÁTICA DOS RESULTADOS	108
6 CONCLUSÃO	111
REFERÊNCIAS	114
APÊNDICE A	117

1 INTRODUÇÃO

A leitura do Informe Anual do Mercado Segurador Brasileiro para o ano de 2012, produzido pela CNSeg (Confederação Nacional das Empresas de Seguros Gerais, Previdência Privada e Vida, Saúde Suplementar e Capitalização), nos dá um panorama da importância deste setor para economia brasileira, que encerrou 2012 com crescimento bem acima do desempenho da economia do país. No ano em que houve retração do Produto Interno Bruto - PIB nacional, os indicadores de expansão do mercado segurador superaram expectativas, reafirmando sua competência para atuar com grande eficiência operacional num cenário de redução das taxas de juros. As companhias seguradoras demonstraram forte capacidade de geração de poupança interna, atingindo R\$ 543,7 bilhões de investimentos que correspondem a 12,35 % do PIB. A receita global do setor foi de R\$ 252,3 bilhões, expansão de 17,49 % sobre o ano anterior, sendo que deste total, R\$ 119,2 bilhões foram devolvidos à sociedade em forma de indenizações, quantia 13,78 % superior à observada no período passado. Além dos bons resultados financeiros o segmento vem ganhando a confiança do consumidor, como mostra as estatísticas do Sindec, sistema que reúne os dados de praticamente todos os Procons do país, que exclui o setor de seguros da lista dos dez segmentos da economia mais reclamados.

A boa *performance* do mercado segurador brasileiro é resultado de investimentos maciços no aperfeiçoamento da qualidade dos serviços prestados e na busca constante da clareza e do dinamismo na interlocução com os públicos do setor: consumidor e investidor. Por ser um mercado regulamentado, as Seguradoras aderem a altos níveis de governança corporativa e as melhores práticas de contabilidade, divulgando suas demonstrações financeiras em conformidade com as normas locais e internacionais (IFRS – *International Financial Reporting Standards*).

Os IFRS's (antigo IAS – *International Accounting Standards*) são pronunciamentos contábeis internacionais publicados pelo IASB - *International Accounting Standards Board*. Sua principal característica é ser baseado em princípios e não em regras. Estes pronunciamentos tem o propósito de convergir os balanços financeiros para um mesmo padrão; prover informações contábeis transparentes e comparáveis, independentemente da origem do país; contribuir para fortalecer a credibilidade das informações disponíveis para investidores internos e externos; desobrigar as instituições com operações internacionais de preparar vários relatórios financeiros, reduzindo custos operacionais. Em 2004 o IASB publicou o pronunciamento IFRS 4 *Insurance Contracts*.

O IFRS foi adotado pelos países da União Europeia a partir do ano de 2005. No Brasil, a Lei 11.638, de 28 de dezembro de 2007, dispôs que órgãos e agências reguladoras podem adotar os pronunciamentos emitidos por entidades que tenham por objeto o estudo e a divulgação de princípios, normas e padrões de contabilidade.

Art. 5º - A Lei nº 6385, de 07 de dezembro de 1976, passa a vigorar acrescida do seguinte art. 10-A: A Comissão de Valores Mobiliários, o Banco Central do Brasil e demais órgãos e agências reguladoras poderão celebrar convênio com entidade que tenha por objeto o estudo e a divulgação de princípios, normas e padrões de contabilidade e de auditoria, podendo, no exercício de suas atribuições regulamentares, adotar, no todo ou em parte, os pronunciamentos e demais orientações técnicas emitidas (BRASIL, 2007).

Neste sentido, a Superintendência de Seguros Privados - SUSEP emitiu a Circular nº 408 em Agosto de 2010, determinando que as Seguradoras devem apresentar suas demonstrações financeiras adotando o padrão contábil internacional do IASB, na forma homologada pelo Comitê de Pronunciamentos Contábeis.

Art. 2º. As sociedades e entidades supervisionadas deverão publicar, a partir do exercício findo em 31 de dezembro de 2010, inclusive, as demonstrações financeiras consolidadas elaboradas de acordo com os pronunciamentos emitidos pelo International Accounting Standards Board - IASB, na forma homologada pelo Comitê de Pronunciamentos Contábeis – CPC (SUSEP, 2010).

O Comitê de Pronunciamentos Contábeis – CPC tem a atribuição de estudar, pesquisar, discutir, elaborar e deliberar sobre o conteúdo e a redação de Pronunciamentos Técnicos, podendo, inclusive, emitir Interpretações, Orientações, Comunicados e Boletins. Foi criado no final de 2005 e é composto por seis entidades: Associação Brasileira de Empresas de Capital Aberto (Abrasca), Associação dos Analistas e Profissionais de Investimento do Mercado de Capitais (Apimec), Fundação Instituto de Pesquisas Contábeis, Atuariais e Financeiras (Fipecafi), Conselho Federal de Contabilidade (CFC), Instituto dos Auditores Independentes do Brasil (Ibracon) e Bovespa. Em 2008 o CPC publicou o pronunciamento CPC 11 Contratos de Seguro

O CPC 11 é uma correlação às normas internacionais IFRS 4 que tem por objetivo especificar o reconhecimento contábil para contratos de seguro por parte das Seguradoras que emitem estes contratos. No seu Apêndice A é definido “contrato de seguro”:

Contrato de seguro é um contrato segundo o qual uma parte (a seguradora) aceita um risco de seguro significativo de outra parte (o segurado), aceitando indenizar o segurado no caso de um evento específico, futuro e incerto (evento segurado) afetar adversamente o segurado (CPC, 2008).

Para os contratos classificados como contratos de seguro, o item 15 do pronunciamento exige que a Seguradora teste a adequação de seu passivo técnico e institui o Teste de Adequação de Passivo - TAP ou *Liability Adequacy Test - LAT*:

A seguradora deve avaliar, a cada data de balanço, se seu passivo por contrato de seguro está adequado, utilizando estimativas correntes de fluxos de caixa futuros de seus contratos de seguro. Se essa avaliação mostrar que o valor do passivo por contrato de seguro (menos as despesas de comercialização diferidas relacionadas e ativos intangíveis relacionados, como os discutidos nos itens 31 e 32) está inadequado à luz dos fluxos de caixa futuros estimados, toda a deficiência deve ser reconhecida no resultado (CPC, 2008).

Com o objetivo de regular o Teste de Adequação de Passivo, a SUSEP publicou a Circular nº 410/2010 (posteriormente revogada pela Circular nº 457/2012), que instituiu o referido teste para fins de elaboração das demonstrações financeiras e definiu regras e procedimentos para sua realização. De acordo com a circular, o TAP tem por objetivo verificar se as Provisões Técnicas constituídas pelas Seguradoras, deduzidas das despesas de comercialização diferidas e dos ativos intangíveis relacionados, são suficientes para suportar o valor presente líquido dos fluxos de caixa futuros de seus contratos de seguro (Estimativa Corrente) descontados pela Estrutura a Termo da Taxa de Juros livre de risco - ETTJ. Havendo insuficiência de provisões, esta deve ser reconhecida imediatamente.

Neste contexto regulatório a ETTJ passa a ter papel central na discussão do TAP, pois é um dos componentes mais sensíveis da metodologia do teste. De acordo com Franklin et al. (2011, p. 2): “Um dos elementos mais relevantes para o cálculo da adequação de passivos é a estimação da estrutura a termo de taxa de juros (ETTJ) livre de riscos, obtida a partir de instrumentos financeiros considerados isentos de risco de crédito disponíveis no mercado brasileiro”. Além da elasticidade do teste em relação à taxa de juros, nos deparamos com um dilema de escolha devido ao fato da literatura especializada oferecer um leque de metodologias possíveis para se fazer a extrapolação e interpolação das taxas de juros, todas fundamentadas tecnicamente e amplamente adotadas pelo mercado financeiro. Ao se escolher um determinado modelo para construção da ETTJ, chegaremos a um resultado do TAP que está condicionado a esta escolha de modelo. Ocorre que outro modelo de ETTJ, igualmente legítimo, poderia ter sido escolhido e, por consequência, chegaríamos a outro resultado para o TAP.

1.1 JUSTIFICATIVA

A Provisão Técnica é um dos principais itens de solvência das Seguradoras e o resultado do TAP é um importante indicador da qualidade desta provisão, na medida em que avalia a suficiência ou insuficiência do provisionamento. Por esse motivo, as Seguradoras precisam apresentar boa *performance* nos testes de adequação. Como a metodologia do TAP é sensível à ETTJ escolhida, as Seguradoras tem especial interesse em conhecer os principais modelos disponíveis para sua construção e o impacto que estas escolhas produzem nos seus testes de adequação. A motivação deste trabalho é oferecer este conhecimento e aprofundar os temas sugeridos por Oliveira e Pizzinga (2012) em “Estudos sobre a ETTJ: Técnicas de Estimativa, Escolhas da SUSEP e Impacto sobre a Constituição de Provisões Exigidas pelo TAP”:

Esse trabalho deve ser seguido por outros que aprofundem a análise de robustez feita até aqui. Esse aprofundamento deve envolver os seguintes temas:

A) Implementação de novas simulações usando fluxos de caixa com diferentes perfis. O objetivo desse exercício é compreender melhor a ligação entre a dispersão dos valores estimados para os passivos das seguradoras e os prazos nos quais há concentração de obrigações. Provavelmente as discrepâncias se devem a extrapolações de longo prazo diferentes entre si, dado que estimativas distintas da curva de juros podem divergir para prazos superiores a, digamos, 30 anos. Pensamos que é necessário saber quais são as taxas cuja incerteza implícita gera as divergências observadas.

B) Repetição dos exercícios descritos no item (A) com dados reais, ou seja, com os verdadeiros fluxos de pagamentos prometidos por uma amostra representativa de seguradoras (OLIVEIRA; PIZZINGA, 2012, p 27).

1.2 SITUAÇÃO PROBLEMA

De acordo com as normas internacionais do IFRS, as Provisões Técnicas deverão ser testadas dentro do princípio da Estimativa Corrente, que avalia a adequação deste passivo através da projeção do fluxo de caixa futuro dos contratos de seguro. Este fluxo será descontado por uma ETTJ que, segundo Oliveira e Pizzinga:

A definição mais comum da estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) se baseia na sua principal função, que é mostrar a relação existente entre as taxas de juros pagas por obrigações de cupom zero sem risco de default e as suas diferentes maturidades. Trata-se, portanto, de um indicador do valor puro do dinheiro no tempo (OLIVEIRA; PIZZINGA, 2012, p. 4).

A ETTJ representa, então, o preço do dinheiro no tempo e como qualquer preço, oscila em função das forças de oferta e demanda a que o ativo está submetido, sendo assim, o mercado é um dos componentes envolvidos na formação da curva de juros. A Teoria do

Mercado Segmentado (*Market Segmentation Theory*), inicialmente proposta por Culbertson (1957), fundamenta este fato demonstrando que os agentes têm preferências bastante definidas acerca dos prazos nos quais eles desejam investir ou captar recursos, e as forças de oferta e demanda pelos títulos com vencimento nessa região é que definem as taxas de juros que irão formar a ETTJ.

As Provisões Técnicas, por sua vez, não têm esta característica. Ainda que a metodologia de cálculo das provisões atenda ao princípio da estimativa corrente, que avalia o passivo através da projeção do fluxo de caixa futuro dos contratos de seguro, seu fluxo é descontado por taxas de juros contratuais ou taxas que atendam ao Princípio da Prudência (onde se pressupõe o emprego de certo grau de precaução na fixação de parâmetros com fins de se preservar a capacidade de solvência) e que não oscilam com o mercado de títulos. É preciso observar ainda, que as taxas de juros utilizadas na “precificação” de um contrato de seguro não são compatíveis com as taxas de juros utilizadas na precificação dos títulos de renda fixa, entre outros motivos, pelo fato de o primeiro contrato não ser negociável (dificultando sua avaliação a valor de mercado) enquanto que o segundo goza de um mercado líquido e regulamentado.

Desta forma, ao submeter estas provisões ao TAP, estamos diante de uma situação conflitante onde o déficit de um período pode se seguir ao superávit do período seguinte, sem que o risco de seguro a que estas provisões foram dimensionadas para suportar tenham se alterado. Neste caso hipotético, a inversão nos resultados do TAP seria explicada unicamente pela oscilação natural da ETTJ. O regulador europeu EIOPA - *European Insurance and Occupational Pensions Authority* deixa claro seu entendimento sobre este assunto em Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors - CEIOPS (2010, p. 4): “*Valuation of technical provisions and the solvency position of an insurer or reinsurer shall not be heavily distorted by strong fluctuations in the short term interest rate.*”

O *gap* existente entre a visão prudencial do cálculo das provisões e a visão *fair value* do teste de adequação é ampliado pelo fato de a ETTJ ser um dos componentes mais sensíveis do teste. Isso faz com que a metodologia adotada na construção da curva de juros tenha grande importância nos resultados do teste de adequação, pois ao se escolher um determinado modelo para construção da ETTJ, chegaremos a um resultado do TAP que está condicionado a esta escolha de modelo. Ocorre que outro modelo de ETTJ, igualmente legítimo, poderia ter sido escolhido e, por consequência, chegaríamos a outro resultado para o TAP. As reversões de reservas, no caso de superávit do teste, e as constituições de reservas, quando ocorre o

déficit, impactam o resultado da empresa, figuram nas demonstrações financeiras publicadas, são mencionadas em notas explicativas e interferem na análise de solvência da Seguradora.

Esta situação problema é um desafio para as Seguradoras que além dos riscos inerentes ao seu negócio precisam também saber avaliar a natureza e o comportamento da ETTJ. Na busca por obter maior controle sobre o problema, surge a questão “Qual o impacto da utilização de diferentes metodologias de ETTJ nos resultados do TAP?”.

1.3 OBJETIVO E CONTRIBUIÇÃO

Este trabalho tem como objetivo geral discutir e aplicar a técnica de interpolação por *Spline* Cúbico, o modelo paramétrico de Svensson e o modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek na construção da Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) que será utilizada para descontar o fluxo de caixa projetado (Estimativa Corrente) das obrigações decorrentes dos contratos de seguros com cobertura por sobrevivência. Como objetivo específico, deseja-se conhecer e analisar a magnitude das diferenças encontradas nos resultados do Teste de Adequação de Passivo (TAP) decorrente da utilização de diferentes modelos de ETTJ, ou seja, analisar a robustez destes resultados. Neste sentido, o presente trabalho preenche um espaço ainda pouco explorado na literatura atuarial, esclarecendo aos seus leitores as principais metodologias disponíveis para modelagem da curva de juros e o impacto de sua escolha nos resultados do Teste de Adequação de Passivo.

2 TESTE DE ADEQUAÇÃO DE PASSIVO – TAP

O Teste de Adequação de Passivo – TAP tem por objetivo verificar se as Provisões Técnicas constituídas pela Seguradora, deduzidas das despesas de comercialização diferidas e dos ativos intangíveis relacionados (*Net Carrying Amount*), são suficientes para suportar o valor presente líquido dos fluxos de caixa futuros de seus contratos de seguro (Estimativa Corrente). Assim, o Teste de Adequação de Passivo é a diferença entre a Estimativa Corrente e o *Net Carrying Amount*. Se a diferença for positiva, está caracterizada uma insuficiência no provisionamento da Seguradora, que deverá ser imediatamente reconhecida.

2.1 DELIMITAÇÃO

Delimitaremos nosso estudo à Estimativa Corrente dos fluxos de caixa futuro das operações relativas às garantias de **sobrevivência** oferecidas pelas Seguradoras. Estas coberturas são regulamentadas pela Circular SUSEP nº 338/2007, no caso de cobertura por sobrevivência oferecida em planos de previdência complementar aberta e pela Circular SUSEP nº 339/2007, no caso de cobertura por sobrevivência oferecida em planos de seguro de pessoas. Este segmento de negócio foi escolhido por abranger contratos de longo prazo onde os efeitos da ETTJ são mais percebidos. Usaremos o termo “participante” para designar tanto os segurados dos planos de seguro quanto os participantes dos planos de previdência.

De acordo com as referidas circulares, os planos que oferecem cobertura por sobrevivência são estruturados em dois períodos distintos: a fase de acumulação, que é o período em que o participante faz contribuições a fim de acumular um fundo, e a fase de concessão, que é o período em que o fundo acumulado será consumido com o pagamento dos benefícios contratados e também o período em que cessam as responsabilidades do participante e se iniciam os compromissos da Seguradora. Assim, a fase de acumulação é o diferimento entre a data de início de vigência da cobertura por sobrevivência e a data de início do pagamento do benefício, quando se inicia o período de concessão. Existe, contudo, a possibilidade de a fase de acumulação ser suprimida do plano, como acontece no caso dos planos que mediante contribuição única, garantem o pagamento do benefício sob a forma de renda imediata. O evento gerador do pagamento do benefício de um plano que ofereça cobertura por sobrevivência será, naturalmente, a sobrevivência do participante ao período de diferimento. É preciso observar, contudo, que existe uma modalidade especial de plano,

chamado Dotal Misto, que oferece cobertura por morte no período de diferimento combinado à cobertura por sobrevivência ao final deste período.

Os planos oferecidos pelas Seguradoras são modulados em função do benefício ser ou não definido no momento da contratação. No caso do benefício definido, as contribuições serão definidas pela Seguradora, a fim de que o fundo acumulado atinja o montante necessário para a conversão naquele valor de benefício contratado, tirando do participante a liberdade de escolher seu perfil de contribuição. No caso do benefício ficar em aberto na contratação, o participante retoma o direito de definir seu perfil de contribuição, consciente de que o benefício só será conhecido ao final do diferimento e em função do volume acumulado no fundo. O pagamento do benefício poderá ser único ou continuado, na forma de renda vitalícia ou com alguma temporariedade.

Outra importante decisão que o participante deve tomar é se vai assumir o risco do retorno dos investimentos na fase de acumulação. A modalidade de plano mais comercializado (PGBL e VGBL) transfere para o participante todo o desempenho dos investimentos, seja ele positivo ou negativo, sendo dada ao participante a possibilidade de escolher o perfil dos investimentos, oferecendo-se fundos de perfil conservador a arrojado. Existe outra modalidade de plano que oferece garantia financeira na fase de acumulação, ou seja, se o retorno dos investimentos for inferior a esta garantia, assegura-se a garantia contratada, caso contrário, o excedente financeiro dos investimentos em relação à garantia assegurada pode ser repartida com o participante, caso esta situação esteja prevista em contrato. Na fase de concessão todos os planos oferecem garantia financeira de taxa de juros e índice de atualização monetária.

2.2 PROVISÕES TÉCNICAS

Uma Seguradora tem por finalidade oferecer garantias aos riscos futuros, incertos e possíveis que venham trazer prejuízos financeiros a seus segurados e participantes. Em contrapartida, recebem destes últimos, os prêmios ou as contribuições ajustadas às respectivas garantias. De outra forma, o “negócio” seguros propõe a troca de uma despesa futura e incerta de grande monta, por uma despesa antecipada e certa de valor relativamente menor.

Ao encarteirar estes riscos, as Seguradoras assumem compromissos financeiros futuros que, em determinadas situações, podem extrapolar em várias vezes o seu exercício fiscal. Para se manter solventes as Seguradoras constituem Provisões Técnicas, que são

reservas financeiras dimensionadas para fazer frente aos compromissos financeiros futuros oriundos dos riscos assumidos. Neste contexto, solvência deve ser entendida como a capacidade em bens e direitos que uma empresa tem para honrar seus compromissos financeiros futuros e alocar os resultados por competência, que representa o princípio contábil de apropriação das receitas e das despesas relativas à operação de seguro pela vigência dos riscos assumidos. Por sua própria definição, as provisões técnicas são estimativas, visto que os riscos a que se propõe garantir são eventos futuros e incertos. A qualidade desta estimativa é determinante para o equilíbrio financeiro da empresa. Segundo Mano e Ferreira (2009, p. 2) “Se as provisões técnicas estiverem superdimensionadas elas comprometem a distribuição de lucros da empresa. Por outro lado, se as provisões técnicas estiverem subdimensionadas, elas podem conduzir à insolvência da empresa”. Além disso, por ser uma responsabilidade, figuram no Passivo da companhia e os ativos dados em garantia a este passivo chamam-se Cobertura das Provisões. A qualquer tempo, as Provisões Técnicas devem ser suficientes para garantir os eventos de sinistros que ainda não ocorreram, que são as provisões não comprometidas formadas pelo excesso de prêmios ou contribuições pagas em relação ao período decorrido do risco, e os eventos de sinistros que já ocorreram, sendo eles avisados ou não, que são as provisões comprometidas ou de sinistros/benefícios.

No Brasil, as Provisões Técnicas constituídas pelas Seguradoras são delimitadas pelo Conselho Nacional de Seguros Privados – CNSP e regulamentadas pela Superintendência de Seguros Privados – SUSEP através de suas circulares. Mediante prévia autorização da SUSEP é permitida a constituição de outras provisões técnicas além das especificadas na norma, desde que justificadas em Nota Técnica Atuarial. De acordo com o Decreto nº 66.408/70, o Atuário é o profissional responsável pelo cálculo das Provisões Técnicas.

Em dezembro/2011, data de referência utilizada neste trabalho para testar a sensibilidade do TAP em relação à ETTJ, as Provisões Técnicas eram regulamentadas pela Resolução nº 162/2006 do CNSP que, entre outras exigências, previa a constituição da Provisão de Insuficiência de Contribuição – PIC quando identificada a insuficiência na tarifa dos produtos que oferecem cobertura por sobrevivência. No início do ano de 2013, o CNSP publicou a Resolução nº 281/2013 que revogou a Resolução nº 162/2006. A Resolução nº 281/2013, combinada com a Circular nº 462/2013, descontinuaram a PIC, porém permitem a constituição de Outras Provisões Técnicas – OPT (mediante a prévia autorização da SUSEP) que pode assumir as características da provisão extinta. Além disso, a Provisão para Despesas

Administrativas – PDA foi renomeada para Provisão de Despesas Relacionadas – PDR e, foi criada a Provisão Complementar de Cobertura – PCC.

A PCC deve ser constituída quando for constatada insuficiência nas Provisões Técnicas, conforme valor apurado no Teste de Adequação de Passivo. Assim, a PCC recebe qualquer insuficiência identificada nas garantias assumidas pela companhia e que ainda não tenha sido provisionada. É importante observar que a forma de se apurar a PCC é pelo Teste de Adequação de Passivo, ou seja, ao incorporar mensalmente em seu passivo técnico os princípios que norteiam este teste, as Seguradoras neutralizam os efeitos de sua aplicação eventual. Para que este mecanismo funcione, a PCC foi excluída do rol de provisões que estão sendo testadas, de forma a acomodar toda insuficiência eventualmente encontrada e ainda não reconhecida.

Por entender que o novo contexto regulatório mantém intactos os princípios que motivaram esta pesquisa (o impacto que a escolha de um modelo para taxa de juros exerce sobre resultados do TAP) e não altera as suas conclusões, tomamos a decisão de manter a redação deste documento como ele foi originalmente concebido, ou seja, mantivemos a estrutura regulatória vigente na época em que ele foi escrito e os testes foram realizados. Na prática isso significa que manteremos a nomenclatura da PDA e que a PIC, contabilizada em dezembro/2011, compõe o *Net Carrying Amount* do TAP realizado nesta data.

2.3 PROVISÕES TÉCNICAS DE SOBREVIVÊNCIA

Net Carrying Amount – NCA é o saldo das Provisões Técnicas, deduzidas das despesas de comercialização diferidas e dos ativos intangíveis relacionados, que estão sendo testadas. Como delimitamos nosso estudo à Estimativa Corrente dos fluxos de caixa futuro das operações relativas às garantias de sobrevivência, as provisões que serão testadas no TAP serão aquelas que tiveram origem nessas operações. A TABELA 1 mostra a participação majoritária, superior a 80%, destas reservas no provisionamento total das Seguradoras, para o mês de dezembro/2012:

- PMBaC – Provisão Matemática de Benefícios a Conceder: representa a responsabilidade da Seguradora com os participantes na fase de acumulação do plano, ou seja, o evento gerador do benefício ainda não ocorreu e o plano encontra-se no período de diferimento.

- PMBC – Provisão Matemática de Benefícios Concedidos: representa a responsabilidade da Seguradora com os participantes na fase de concessão do plano, ou seja, o evento gerador do benefício já ocorreu e o plano encontra-se no período de pagamento de benefícios.
- PIC – Provisão de Insuficiência de Contribuições: esta provisão deve ser constituída sempre que se verificar insuficiência na precificação, a fim de se restaurar o equilíbrio atuarial do plano.
- PDA – Provisão para Despesas Administrativas: esta provisão deve ser constituída para fazer frente às despesas administrativas relativas à manutenção do pagamento dos benefícios contratados.
- PEF – Provisão de Excedentes Financeiros: os planos que oferecem participação no excedente financeiro devem provisionar estes resultados enquanto não forem distribuídos aos participantes.

TABELA 1 - Provisionamento Técnico feito pelo Mercado Segurador em 12/2012

Provisão Técnica	Saldo em R\$ milhões	Participação em %
Provisão Matemática de Benefícios a Conceder ⁽¹⁾	307.284	78,5%
Provisão Matemática de Benefícios Concedidos	10.117	2,6%
Provisão de Insuficiência de Contribuições	7.613	1,9%
Provisão para Despesas Administrativas ⁽²⁾	381	0,1%
Provisão de Excedentes Financeiros	1.635	0,4%
Demais Provisões Técnicas	64.264	16,4%
Total das Provisões Técnicas	391.294	100%

Fonte: SES (2012)

⁽¹⁾ Inclui cobertura de risco em regime de capitalização

⁽²⁾ Saldo estimado (SES não faz abertura para esta provisão)

Base Técnica para cálculo das Provisões Matemáticas de Sobrevivência (participantes ativos e assistidos). Da Matemática Financeira sabemos que o valor presente financeiro VPF de um fluxo de pagamento certo de valor B descontado a uma taxa de juros constante i é dado por:

$$VPF = \sum_t^n \frac{B_t}{(1+i)^t}$$

$$Fator\ Financeiro = \sum_t^n \frac{1}{(1+i)^t}$$

Se adicionarmos a este fluxo a incerteza p com relação ao pagamento de suas parcelas B , teremos o valor presente atuarial VPA , que é dado por:

$$VPA = \sum_t^n \frac{p_t \cdot B_t}{(1+i)^t}$$

$$Fator\ Actuarial = \sum_t^n \frac{p_t \cdot 1}{(1+i)^t}$$

Neste caso, VPF representa o valor presente de um fluxo de pagamentos certo, ou seja, não há dúvidas com relação ao pagamento das parcelas B , elas vão acontecer em cada momento t até o momento n . VPA representa o valor presente de um fluxo de pagamentos aleatórios, ou seja, há dúvidas com relação ao pagamento das parcelas B , elas podem não acontecer em dado momento t e serem interrompidas antes do momento n em função da probabilidade p . O limite superior do somatório, n , pode indicar um número definido de parcelas ou um número indefinido como, por exemplo, a renda perpétua de um aluguel ou a renda vitalícia de um benefício previdenciário que, neste caso, representa a última idade da tábua biométrica utilizada para o cálculo da renda.

No fluxo aleatório, enquanto não chegarmos ao momento n , a condição para que o pagamento de determinada parcela B_t se realize é a sobrevivência do credor. Assim, p_t representa a probabilidade do credor estar vivo no momento t para poder receber a parcela B_t caso não esteja, interrompe-se o fluxo de pagamentos.

Para prosseguirmos é necessário quantificar p , a probabilidade de sobrevivência. É fato que a vida humana está limitada a uma quantidade desconhecida, mas finita, de anos vividos. Podemos fazer p em função da idade x de um indivíduo, assim, à medida que x aumenta p diminui. Jordan (1991) define a função sobrevivência $s(x)$ com as seguintes propriedades: 1) $s(x)$ é uma função contínua, decrescente em relação à x visto que a probabilidade de sobreviver à idade x é maior que a de sobreviver à idade $x+t$, $t > 0$; 2) $s(x)$ é uma função contínua de x definida no intervalo $0 \leq x \leq w$, que decresce do valor $s(0) = 1$ até $s(w) = 0$. Graficamente a função sobrevivência pode ser representada conforme GRÁFICO 1:

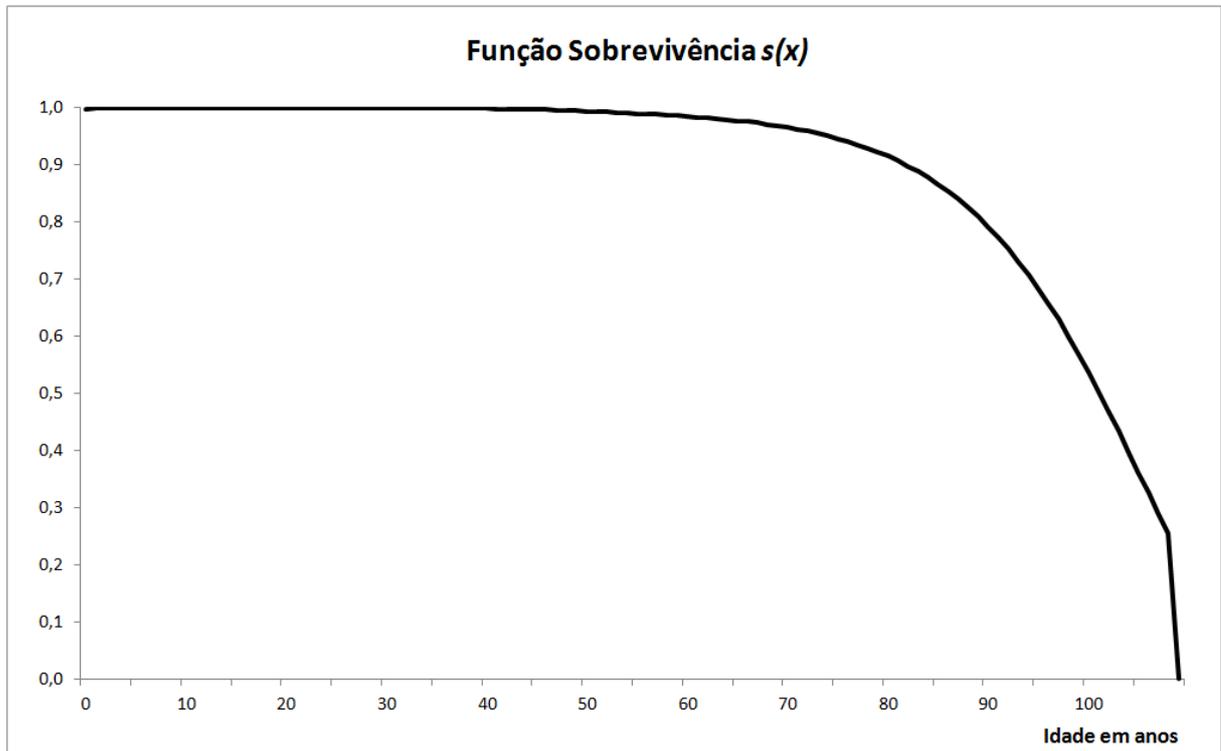


GRÁFICO 1 – Representação gráfica da função sobrevivência $s(x)$

Fonte: Do Autor com base nas probabilidades de sobrevivência da Tábua Biométrica AT49M

É difícil encontrar uma forma funcional e parcimoniosa para uma função que se ajuste perfeitamente a essa curva ao longo de todas as idades. Na prática p_x , a probabilidade de um indivíduo de idade x sobreviver mais um ano e chegar a idade $x+1$, é tabelada através de seu complemento q_x , a probabilidade de um indivíduo de idade x morrer antes de completar a idade $x+1$ anos. Sendo p_x e q_x probabilidades complementares sua soma resulta na unidade. Chamamos Tábua Biométrica a tabela que relaciona x com q_x , e que está disponível para as mais diversas populações e períodos como, por exemplo, masculina ou feminina, geral ou de uma comunidade específica, de uma região ou país, para ativos ou inválidos. O GRÁFICO 1, por exemplo, representa a função sobrevivência da experiência Americana masculina para o ano de 1949 (AT49M). A Tábua Biométrica é a principal ferramenta para precificação de seguros de pessoas.

Provisão Matemática de Benefícios Concedidos (PMBC). O participante de um plano de aposentadoria que se encontra na fase de concessão de, por exemplo, uma renda vitalícia, transfere à Seguradora a responsabilidade de pagar um fluxo de benefícios periódicos com prazo incerto. Esta responsabilidade pode ser mensurada através do *VPA*. A este *VPA* daremos o nome de Provisão Matemática de Benefícios Concedidos - PMBC. A mesma provisão poderia ser calculada pelo *VPF* se o benefício fosse pago na forma de uma

renda certa. De fato, são variadas as formas em que os benefícios podem ser pagos. Conforme a SUSEP temos:

- Renda Mensal Vitalícia: consiste em uma renda paga vitaliciamente ao participante a partir da data de concessão do benefício.
- Renda Mensal Temporária: consiste na renda paga temporária e exclusivamente ao participante. O benefício cessa com o seu falecimento ou o fim da temporariedade contratada, o que ocorrer primeiro.
- Renda Mensal Vitalícia com Prazo Mínimo Garantido: consiste em uma renda paga vitaliciamente ao participante a partir da data da concessão do benefício, sendo garantida aos beneficiários da seguinte forma:

No momento da inscrição, o Participante escolherá um prazo mínimo de garantia que será indicado na Proposta de Inscrição. O prazo mínimo da garantia é contado a partir da data do início do recebimento do benefício pelo participante. Se durante o período de percepção do benefício ocorrer o falecimento do participante, antes de ter completado o prazo mínimo de garantia escolhido, o benefício será pago aos beneficiários conforme os percentuais indicados na Proposta de Inscrição, pelo período restante do prazo mínimo de garantia. No caso de falecimento do participante, após o prazo mínimo garantido escolhido, o Benefício ficará automaticamente cancelado sem que seja devida qualquer devolução, indenização ou compensação de qualquer espécie ou natureza aos beneficiários. No caso de um dos Beneficiários falecer antes de ter sido completado o prazo mínimo de garantia, o valor da renda será rateado entre os beneficiários remanescentes até o vencimento do prazo mínimo garantido. Não havendo qualquer beneficiário remanescente, a renda será paga aos sucessores legítimos do participante, pelo prazo restante da garantia.

- Renda Mensal Vitalícia Reversível ao Beneficiário Indicado: consiste em uma renda paga vitaliciamente ao participante a partir da data de concessão do benefício escolhida. Ocorrendo o falecimento do participante, durante a percepção desta renda, o percentual do seu valor estabelecido na proposta de inscrição será revertido vitaliciamente ao beneficiário indicado. Na hipótese de falecimento do beneficiário, antes do participante e durante o período de percepção da renda, a reversibilidade do benefício estará extinta sem direito a compensações ou devoluções dos valores pagos. No caso do beneficiário falecer, após já ter iniciado o recebimento da renda, o benefício estará extinto.
- Renda Mensal Vitalícia Reversível ao Cônjuge com Continuidade aos Menores: consiste em uma renda paga vitaliciamente ao participante a partir da data de concessão do

benefício escolhida. Ocorrendo o falecimento do participante, durante a percepção desta renda, o percentual do seu valor estabelecido na proposta de inscrição será revertido vitaliciamente ao cônjuge e na falta deste, reversível temporariamente ao(s) menor(es) até que completem uma idade para maioridade estabelecida no Regulamento e conforme o percentual de reversão estabelecido.

- Renda Mensal por Prazo Certo: consiste em uma renda mensal a ser paga por um prazo pré-estabelecido ao participante/assistido.
- Pagamento Único: No primeiro dia útil seguinte à data prevista para o término do período de diferimento, será concedido ao participante benefício sob a forma de pagamento único, calculado com base no saldo de Provisão Matemática de Benefícios a Conceder verificado ao término daquele período.

Não importando o tipo de renda, a PMBC referente à responsabilidade que a Seguradora tem com os participantes em fase de concessão sempre será calculada pelo *VPA*, devidamente customizado para o formato da renda contratada. Entendendo-se que o *VPA* é uma generalização do *VPF*, bastando para isso que se faça $p_t = 1$.

Provisão Matemática de Benefícios a Conceder (PMBaC). Segundo Mano e Ferreira (2009), durante a fase de acumulação, no período de diferimento do plano, a responsabilidade da Seguradora é representada pela PMBaC. Para definir sua fórmula de cálculo é necessário distinguir se no momento da contratação do plano o benefício já foi definido ou ficou em aberto.

Quando o benefício não é definido, as contribuições são variáveis e fica a critério do participante que pode, inclusive, não fazê-las. Neste caso o benefício só será conhecido ao final do diferimento e em função do valor acumulado no fundo. A PMBaC desta modalidade será o próprio valor do fundo acumulado pelas contribuições feitas pelo participante até o momento do cálculo da provisão.

Quando o benefício é definido, as contribuições são fixadas pela Seguradora a fim de que o fundo acumulado atinja o montante necessário para a conversão naquele valor de benefício. Neste caso, as duas responsabilidades já são conhecidas: a do participante com o fluxo de pagamento de contribuições e a da Seguradora com o fluxo de pagamento de benefícios. A PMBaC desta modalidade será calculada pela diferença entre dois *VPA*'s devidamente customizado ao formato da renda: um *VPA* referente ao fluxo de pagamento dos

benefícios que está sob responsabilidade da Seguradora e outro *VPA* referente ao fluxo de pagamento das contribuições que está sob responsabilidade do participante.

Provisão de Excedentes Financeiros (PEF). Vimos que na fase de concessão todos os planos oferecem garantias financeiras, taxa de juros e atualização monetária. Na fase de acumulação, porém, nem todos os planos oferecem esta garantia mínima de rentabilidade, transferindo para o participante a rentabilidade integral da carteira onde suas contribuições estão aplicadas. É possível que os planos que oferecem garantia financeira, também ofereçam uma participação no excedente financeiro caso a rentabilidade da carteira ultrapasse a garantia mínima, ou seja, a participação no excedente financeiro está condicionada a uma cláusula contratual. A regra de participação no excedente financeiro prevê uma periodicidade para sua distribuição, que pode ser mensal, anual ou em alguma data pré-estabelecida. Enquanto este valor não é distribuído na conta do participante, ele deve estar provisionado na PEF. Esta provisão é um complemento da PMBaC ou da PMBC e contempla os valores de excedente financeiro que ainda não foram distribuídos aos participantes.

Seu cálculo reproduz as regras contratuais de participação no excedente financeiro para os planos que oferecem esta possibilidade. Geralmente esta regra se limita à distribuição de um percentual do excedente financeiro da rentabilidade da carteira sobre a garantia mínima oferecida.

Provisão de Insuficiência de Contribuições (PIC). A Tábua Biométrica é o principal componente na precificação dos planos que oferecem cobertura por sobrevivência. No momento da contratação do plano é garantido ao participante que a conversão de sua PMBaC em benefício será feita por uma determinada expectativa de vida que deriva da Tábua Biométrica mencionada no contrato. Segundo Jordan (1991), a Tábua Biométrica representa a expectativa de vida de uma população em determinado momento, mas como se verifica que com o decorrer do tempo a expectativa de vida do ser humano aumenta, um participante que venha a se aposentar hoje e tenha contratado seu plano há trinta anos, receberá um benefício incompatível com a sua atual expectativa de vida, gerando um déficit atuarial no plano. Este déficit deve ser estimado para cada participante e provisionado na PIC. A SUSEP regulamentou o cálculo da PIC no art. 2º do anexo II da Circular nº 272/2004.

Provisão de Insuficiência de Contribuições - Fase de Acumulação. De acordo com Mano e Ferreira (2009, p. 230), para o cálculo da PIC “deve-se necessariamente fazer uso de projeções financeiras [...] considerando-se premissas de despesas futuras, redução na mortalidade, resgate total, prêmios futuros, etc.” Sendo assim, cada participante terá o saldo

de sua PMBaC, mais o saldo de sua PEF, projetado ano a ano, até a data escolhida para sua aposentadoria, de acordo com as opcionalidades que seu contrato prevê: rentabilidade, distribuição de excedentes financeiros, contribuições futuras, resgates parciais, totais ou por morte/invalidéz e, na data escolhida para aposentadoria, a conversão em renda. Para os planos que oferecem garantia de rentabilidade mínima na fase de acumulação será necessário, ainda, estimar o custo referente à possibilidade da rentabilidade dos ativos não acompanharem a garantia financeira, que chamamos de Déficit Financeiro. Para os planos que não oferecem garantia de rentabilidade mínima na fase de acumulação será necessário arbitrar a rentabilidade do fundo. Sugerimos que seja rentabilizado de forma conservadora pela taxa SELIC projetada, a taxa de juros básica da economia onde sempre será possível o reinvestimento dos títulos vencidos. Todas estas premissas devem ser estimadas utilizando-se as melhores práticas e com base na experiência da Seguradora, na falta desta pode-se recorrer a *benchmarks* de mercado.

Só no final desse processo iterativo é possível conhecer o benefício que será pago, dividindo-se o saldo convertido pelo fator atuarial contratual, que é construído com a tábua biométrica e a taxa de juros do contrato. Exceção feita à modalidade benefício definido onde o benefício já é conhecido no início do processo. Com o benefício calculado de acordo com as garantias contratadas, encontramos o saldo de reserva necessário para honrar este compromisso, que será o valor presente atuarial do fluxo de pagamento dos benefícios. O fator atuarial realista usado para calcular este valor presente, será construído com a tábua biométrica realista e a taxa de juros do contrato. Sugerimos utilizar como tábua realista aquela que representa a experiência brasileira, que no caso é a BR-EMS conforme publicado na Circular SUSEP nº 402/2010. Além disso, é aconselhável aplicar o *improvement*, que é um ajuste na tábua por critério de desenvolvimento das expectativas de ganho na longevidade da população.

Se a diferença entre o saldo calculado pelo valor presente atuarial for maior que o saldo convertido da evolução, temos a insuficiência de contribuição. A PIC será esta insuficiência descontada pela taxa contratual da data da aposentadoria até a data de hoje. Havendo Déficit Financeiro, este fluxo descontado pela taxa contratual também irá compor a PIC. Esquemáticamente temos:

Saldo Inicial	PMBaC+PEF	
(+)	Rentabilidade	} processo iterativo
(+)	Excedente Financeiro	
(+)	Contribuições	
(-)	Resgates	
Saldo Final	PMBaC+PEF (data de aposentadoria)	
(x)	Taxa de conversão em renda	
(=)	Saldo convertido = $(PMBaC+PEF)_{contratual} = PMBC_{contratual}$	
(÷)	Fator atuarial contratual (tábua contratual e juros contratual)	
(=)	Benefícios	
(x)	Fator atuarial realista (tábua realista e juros contratual)	
(=)	Valor presente atuarial = $(PMBaC+PEF)_{realista} = PMBC_{realista}$	

Déficit Atuarial na data da aposentadoria = $PMBC_{realista} - PMBC_{contratual}$

PIC = Déficit Atuarial + Déficit Financeiro trazido a valor presente pela taxa de juros contratual

Provisão de Insuficiência de Contribuições - Fase de Concessão. Neste caso os participantes já converteram sua PMBaC em renda e, portanto, não é mais necessário fazer a evolução do saldo para se estimar o benefício, ele já é conhecido. Nesta fase, a PIC vem do confronto entre a PMBC realista, que é o valor presente atuarial realista do fluxo de benefícios, e a PMBC contabilizada, que é o valor presente atuarial contratual do mesmo fluxo de benefícios, apenas no caso da diferença ser positiva:

$PMBC_{realista} = \text{Benefício} \times \text{fator atuarial realista (tábua realista e juros contratual)}$

$PMBC_{contratual} = \text{Benefício} \times \text{fator atuarial contratual (tábua contratual e juros contratual)}$

$PIC = PMBC_{realista} - PMBC_{contratual}$

Provisão para Despesas Administrativas (PDA). Esta provisão deve ser constituída para fazer frente às despesas administrativas diretas ou indiretas relativas à manutenção do pagamento dos benefícios contratados. Este valor representa uma quantidade em reais suficiente para arcar com as despesas mensais de manutenção de um assistido e que só existirá enquanto o participante estiver vivo e recebendo o benefício. O valor individualizado pode ser determinado rateando-se as despesas administrativas mensais, diretas ou indiretas, relativas à manutenção do pagamento dos benefícios pela quantidade de assistidos desse mês. A PDA será o valor presente atuarial realista do fluxo de pagamento destas despesas. No caso dos participantes assistidos, em fase de concessão, fazemos simplesmente: valor individualizado x

fator atuarial realista (tábua realista e juros contratual). Para os participantes ativos, em fase de acumulação, precisamos ainda descontar este valor presente, que está posicionado na data de aposentadoria escolhida pelo participante, pela taxa de juros contratual.

2.4 ESTIMATIVA CORRENTE

Estimativa Corrente é o valor presente esperado do fluxo de caixa futuro dos contratos de seguro, descontado pela Estrutura a Termo da Taxa de Juros livre de risco – ETTJ. A geração do fluxo de caixa futuro anual dos contratos de seguros deve ser feita para cada participante e agrupada por: fase do plano (acumulação ou concessão), taxa de juros, índice de preços, tábua biométrica e percentual de reversão de excedente financeiro. Dessa forma, teremos tantos fluxos quantos forem os agrupamentos decorrentes da segmentação da carteira segurada.

Os **participantes na fase de concessão** já converteram seu saldo em renda e, portanto, não é mais necessário fazer a evolução do fundo para se estimar o benefício, ele já é conhecido. O fluxo de caixa futuro anual dos contratos de seguro para os participantes na fase de concessão é composto pelas variáveis benefícios e despesas administrativas referentes à manutenção destes pagamentos, condicionadas à sobrevivência do participante pela BR-EMS, tábua biométrica brasileira informada pela Circular SUSEP nº 402/2010.

Para os **participantes na fase de acumulação** evoluímos o fundo até a definição do valor do benefício de forma semelhante ao descrito na PIC a Conceder, apenas incluindo-se a estimativa para o resgate da parte do saldo acumulado não convertido em benefício. A partir do momento que conhecemos o benefício a ser pago, que acontece na data de aposentadoria escolhida pelo participante, deixamos de apurar o déficit atuarial e passamos a projetar o fluxo de pagamento anual dos benefícios adicionado às despesas administrativas referentes à manutenção destes pagamentos. Esta parte do fluxo está condicionada à sobrevivência do participante por uma tábua realista, BR-EMS. Neste modelo admitimos, por hipótese, que as receitas com a taxa de carregamento sobre as contribuições somadas a taxa de administração dos fundos, são equivalentes às despesas administrativas para manutenção da empresa, não gerando excedentes ou déficits. As variáveis que compõem os fluxos de caixa futuro dos contratos de seguro nesta fase são:

- (+) Contribuições
- (+) Excedente Financeiro
- (-) Déficit Financeiro
- (-) Resgates
- (-) Benefícios
- (-) Despesa administrativa referente a pagamento de benefícios

Durante o período em que esta dissertação foi desenvolvida, meados de 2011 ao final de 2012, o Teste de Adequação de Passivo era regulamentado pela Circular nº 410/2010 que permitia descontar a Estimativa Corrente por uma ETTJ construída pela própria Seguradora, desde que fundamentada tecnicamente ou baseada em práticas amplamente adotadas pelo mercado financeiro. No final do ano de 2012 a SUSEP revogou a mencionada circular com a publicação da atual Circular nº 457/2012, que faz algumas alterações pontuais no TAP. Destacamos duas dessas alterações: 1) A Estimativa Corrente deverá ser descontada pela ETTJ definida pela SUSEP; 2) Da eventual insuficiência do teste, poderá ser deduzida a parcela correspondente à diferença entre o valor de mercado e o valor do registro contábil, na data-base, dos títulos vinculados em garantia das provisões técnicas, registrados contabilmente no seu ativo na categoria “mantido até o vencimento”, e que sejam utilizados como base de apuração do cálculo de excedentes financeiros.

Observamos, porém, que a abrangência desta norma está limitada às demonstrações financeiras individuais que estão sob a supervisão da SUSEP. Seguradoras ligadas a bancos ou a grupos internacionais mantêm suas publicações consolidadas em consonância com o IFRS 4, ou seja, poderão escolher um modelo para construção da ETTJ que irá descontar seus fluxos de caixa futuros podendo ser, inclusive, aquela divulgada pela SUSEP. De fato, a própria SUSEP prevê no artigo 12º da referida circular, a possibilidade de se utilizar ETTJ diferente daquela por ela publicada, mediante prévia autorização. Sendo assim, entendemos que o novo contexto regulatório mantém intactos os princípios que motivaram esta pesquisa (o impacto que a escolha de um modelo para taxa de juros exerce sobre os resultados do TAP), apenas fazendo constar esta nota com o objetivo de esclarecer ao leitor os recentes atos do regulador.

3 ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS – ETTJ

Apesar de algumas metodologias de análise financeira assumirem que a taxa de juros se mantém constante ao longo do tempo, não é isso que se observa. Tome, por exemplo, o sistema de financiamento de imóveis a prestações constantes, comumente chamado de Tabela Price. Neste modelo, um financiamento de longo prazo tem suas prestações fixadas a partir da hipótese de que a taxa de juros se manterá constante durante todo o período que o mutuário levará para pagar sua dívida junto ao agente financeiro. Para este último rentabilizar sua operação pela taxa de juros contratual, será necessário que as prestações resgatadas sejam reinvestidas no mesmo nível contratado, o que dificilmente ocorrerá, pois as taxas de juros não se mantêm constante ao longo do tempo, inviabilizando a taxa interna de retorno como sendo a rentabilidade final da operação. Na verdade, as taxas de juros tem um comportamento dinâmico, oscilando ao longo do tempo em função, entre outros motivos, da expectativa de inflação que carregam e da própria preferência que investidores e tomadores de dinheiro têm por determinadas maturidades de dívidas. Este comportamento tipifica um processo estocástico, na medida em que a taxa de juros é uma variável aleatória indexada a um intervalo de tempo, ou seja, evoluem no tempo e são analisadas em termos probabilísticos.

A rigor não se compra ou vende taxas de juros, mas sim títulos que pagam taxas de juros. É a partir do mercado de títulos de renda fixa que estabelecemos as bases da Estrutura a Termo da Taxa de Juros. Título de renda fixa é um título de dívida emitido por empresas (títulos privados) ou pelo governo (títulos públicos) com o objetivo de buscar recursos financeiros no mercado para financiamento de suas atividades. Sua principal característica é a de que o resgate desta dívida se faz de forma pré-estabelecida, gerando um fluxo de pagamento futuro com periodicidade e rendimento conhecidos no momento da sua emissão. São exemplos destes títulos as Letras do Tesouro Nacional – LTN, os Certificados de Depósitos Bancários – CDB e as Debêntures emitidas pelas empresas. A modalidade de renda fixa mais simples é o título que paga rendimento apenas no seu vencimento ou maturidade, trata-se de um título sem cupom ou *zero coupon bond* que apresenta um valor de face no qual o emissor se compromete a pagar ao investidor de forma única e em seu vencimento, resgatando o título em caráter definitivo. A precificação de um título destes se faz pelo valor presente descontado ou função desconto, já que o valor de resgate vem expresso na face do título.

Vejam os casos da LTN, um título pré-fixado que tem estas características. Em determinado dia estão sendo negociadas duas LTNs: LTN₁ com vencimento para um ano e

LTN₂ com vencimento para dois anos, ambas com valor de face de R\$ 1.000. Neste dia o mercado para **taxa à vista** ou *spot rate*, está pagando 6% para um título zero cupom com vencimento para um ano e 7% para um título zero cupom com vencimento para dois anos. Queremos o preço de mercado destes títulos hoje: $LTN_1 = 1000 \times 1,06^{-1} = 943,40$ e $LTN_2 = 1000 \times 1,07^{-2} = 873,44$. Alternativamente, se forem conhecidos os preços dos títulos hoje, podemos determinar a taxa à vista para cada maturidade. É importante observar que o portador deste título, posto hoje à venda, tem a garantia de rendimento contratado no momento da compra, bastando que para isso segure o título até o vencimento, não importando o quanto oscile o mercado de taxas à vista. Neste caso, o investidor estará seguindo a estratégia *buy-and-hold* em oposição à estratégia de seguir a curva de juros (*riding the yield curve*) vendendo antes do vencimento.

Outra modalidade de título de renda fixa é aquela que paga cupons periódicos, devolvendo o principal no vencimento juntamente com o último cupom. As Notas do Tesouro Nacional série F – NTN-F pertencem a esta modalidade e devem ser precificadas de acordo com fluxo de caixa que oferecem ao investidor. As NTNs pagam cupom semestral, mas para efeito desta ilustração vamos admitir um título que pague cupom anual de 4% com vencimento em dois anos e valor de face de R\$ 1.000. O fluxo de encaixe oferecido por este título é de R\$ 40 ao final do primeiro ano e de R\$ 1.040 ao final do segundo ano. Utilizando as taxas de mercado à vista dos títulos zero cupom, precificaremos este título mais complexo em dois momentos: $40 \times 1,06^{-1} + 1040 \times 1,07^{-2} = 37,74 + 908,38 = 946,12$. Agora que temos o fluxo de caixa completo é possível calcular uma taxa única para este investimento através do processo iterativo da taxa interna de retorno (TIR), sendo esta taxa também conhecida como taxa de retorno esperada até o vencimento ou *yield to maturity* (YTM): $946,12 = 40 \times (1+y)^{-1} + 1040 \times (1+y)^{-2} \Rightarrow y = 6,98\%$

Seguiremos Rossi (1996) a fim de introduzir a importante relação entre as taxas de juros de curto e longo prazo. Em um cenário sem incertezas e sem custo de transação se apresentam duas estratégias de investimento: aplicar em uma LTN com vigência para dois anos que paga $y_{t,2}$ ou aplicar o mesmo valor em uma LTN com vigência para um ano que paga $y_{t,1}$, reaplicando ao final deste ano seu principal mais juros na compra de uma nova LTN com vigência de um ano que paga $y_{t+1,1}$. A condição de não arbitragem é a de que ambas as estratégias tenham o mesmo desempenho e, para que isso ocorra, devemos ter: $(1 + y_{t,2})^2 = (1 + y_{t,1}) \times (1 + y_{t+1,1})$. Assim, a taxa de juros corrente de longo prazo é a média geométrica das taxas de juros de um período válidas para cada período até o vencimento do

título. Chamamos a taxa de juros corrente para um determinado período no futuro de **taxa a termo** ou *forward rate*.

A **Estrutura a Termo da Taxa de Juros** – ETTJ é a relação entre as taxas *spot* de títulos zero cupom e suas respectivas maturidades, incluindo as maturidades nas quais inexistem títulos vencendo. Esta condição faz da ETTJ um objeto não observável, na medida em que não é possível construí-la pela simples observação dos títulos negociados, sendo necessário o desenvolvimento de um modelo que estime as taxas para qualquer maturidade. Esta relação só deve ser construída para títulos com mesmo risco de crédito, cotados na mesma moeda ou indexador e para uma determinada data, visto que para datas diferentes teremos curvas diferentes. Em sua essência, uma estrutura a termo de taxa de juros representa o custo puro do dinheiro no tempo e, por esse motivo, deve ser construída tendo por base títulos sem risco de crédito e sem pagamento de cupons intermediários, pois o recebimento de cupons implica em risco de reinvestimento.

No Brasil, além das taxas dos títulos públicos também são utilizadas para construção da ETTJ as taxas dos seus derivativos em contratos futuros ou *swap*, negociados na Bolsa de Mercadorias e Futuros - BM&FBOVESPA. A ETTJ espelha um sistema de taxas de juros para prazos diversos que desempenha um importante papel na dinâmica da economia. Mudanças nas taxas de juros de curtíssimo prazo, que é controlada pelo Banco Central e constitui o principal instrumento de política monetária, exercem forte influência sobre as demais taxas de juros do sistema que, por sua vez, são balizadoras das decisões dos investimentos feitos por empresas e instituições. A Estrutura a Termo da Taxa de Juros também é conhecida por **curva de juros** ou *yield curve*, um termo bastante genérico que pode ser utilizado para descrever a estrutura a termo de quaisquer tipos de taxas de juros e das funções de desconto relacionadas.

É de fundamental importância compreender a evolução temporal das taxas de juros. Esta compreensão permite: (i) avaliar e apreçar fluxos de caixa financeiros, (ii) construir portfólios ótimos, (iii) elaborar previsões para o custo futuro do dinheiro, para a taxa de inflação e para o estado da atividade econômica, e (iv) permitir ao governo acompanhar os efeitos das decisões de política monetária. Valle (2010) cita quatro importantes aplicações para ETTJ:

1) Previsões: de acordo com a Teoria das Expectativas, a ETTJ reflete as expectativas do mercado com relação às taxas de juro futuras, que são importantes na medida em que influenciam as decisões dos agentes econômicos;

- 2) Política monetária: o Banco Central utiliza a SELIC (que é a taxa básica da economia brasileira) para conduzir a política monetária dentro do regime de metas de inflação. Como o seu objetivo final é o nível desejado da taxa de juros real, ETTJ's construídas com base em medidas de taxas reais constituem importantes ferramentas de apoio ao Banco Central;
- 3) Gestão da dívida pública: o Tesouro Nacional emite títulos para a rolagem da dívida pública, sendo que as ETTJ's revelam o custo da emissão de novos títulos ou da recompra de títulos antigos;
- 4) Gerenciamento de riscos e apreçamento de ativos: a gestão de uma carteira de renda fixa só é possível quando as ETTJ's relevantes são devidamente modeladas.

Passamos a estruturar o problema sob o regime de **capitalização contínua**. A transição entre a capitalização em tempo discreto para capitalização em tempo contínuo ocorre quando a frequência da capitalização aumenta indefinidamente. Nestas condições o intervalo de capitalização tende a zero e o montante acumulado tende a um determinado limite. Aplicando o capital C , pelo prazo τ , a juros i , capitalizados k vezes, teremos o seguinte montante M :

$$M = C \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot \tau} = C \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{\frac{k}{i}} \right]^{i \cdot \tau}$$

Fazendo a frequência de capitalização crescer indefinidamente, os intervalos se avizinham e o montante tende a:

$$M = C_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{\frac{k}{i}} \right]^{i \cdot \tau} = C e^{r \cdot \tau} \quad ; \quad \text{sendo } r \text{ a taxa instantânea ou contínua}$$

A equivalência entre as taxas discreta e continua vem da igualdade entre os montantes produzidos em cada regime: $C(1+i)^\tau = C e^{r \cdot \tau} \rightarrow i = e^r - 1 \rightarrow r = \ln(1+i)$

Vamos calcular a taxa *forward* utilizando a taxa de juros instantânea. Vimos que a taxa *forward* é a taxa contratada hoje para ter vigência em um período futuro τ , e que seu valor corresponde ao incremento da taxa *spot* para esse período de vigência no futuro. Se a taxa *spot* para maturidade de um ano for 4% e para maturidade três anos for de 5%, então a equivalência para se determinar a taxa *forward* será: $e^{0,04(1)} \cdot e^{f(3-1)} = e^{0,05(3)}$, logo, $f = 5,5\%$. A fórmula fica:

$$f = \frac{s_2 \tau_2 - s_1 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$$

Ou de forma equivalente

$$f = s_2 + \frac{(s_2 - s_1) \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$$

Se levarmos a diferença entre as maturidades τ_2 e τ_1 ao limite de zero, teremos:

$$f = s + \tau \frac{ds}{d\tau}$$

Tendo por base Rossi (1996), definimos as seguintes funções no campo contínuo:

$M(\tau) = e^{\tau s(\tau)}$	Montante (de hoje até a maturidade τ)
$\delta(\tau) = e^{-\tau s(\tau)}$	Desconto (da maturidade τ até hoje)
$P(\tau) = \delta(\tau) = e^{-\tau s(\tau)}$	Preço de hoje para um título zero cupom, com valor de face \$1, vencimento em τ , descontado a taxa $s(\tau)$
$f(\tau) = s(\tau) + \tau s'(\tau)$	Taxa <i>forward</i> corrente para o instante futuro τ
$s(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(u) du$	Taxa <i>spot</i> corrente para maturidade τ (média das taxas <i>forward</i>)
$s(\tau) = - \frac{\ln(\delta(\tau))}{\tau}$	Taxa <i>spot</i> a partir do desconto
$f(\tau) = - \frac{\delta'(\tau)}{\delta(\tau)}$	Taxa <i>forward</i> a partir do desconto
$\delta(\tau) = e^{-\int_0^\tau f(u) du}$	Desconto a partir da taxa <i>forward</i>

As funções que definem desconto, taxa *spot* e taxa *forward* são complementares e intercambiáveis entre si. Finalmente, definimos o modelo básico de precificação de um título de renda fixa:

$$P = \sum_{\tau=1}^T C e^{-\tau s(\tau)} + R e^{-T s(T)}$$

onde:

P = preço do título

$e^{-\tau s(\tau)}$ = função desconto

C = valor do cupom pago periodicamente em $\tau = 1, \dots, T$

R = valor de face do título em T

3.1 FORMATO E MOVIMENTAÇÃO DA ETTJ

A relação entre as taxas de retorno dos títulos zero cupom e suas maturidades pode ser representada graficamente. Esta forma de representação permite uma análise mais detalhada e completa do comportamento das taxas de juros. Fabozzi (1997, p. 112) mostra que as taxas de juros evoluem traçando basicamente quatro formatos de curvas: normal (positiva), invertida (negativa), arqueada (“corcunda”) e plana (rentabilidade fixa). Estes possíveis desenhos de curva estabelecem uma relação entre as taxas de curto e longo prazo: quando as taxas no curto prazo forem mais baixas que as de longo prazo teremos uma curva de juros positiva e, por serem mais comumente observadas também são conhecidas por curva de juros normal (é esperado que o investidor cobre mais para aplicar no longo prazo); quando ocorrer o contrário, passamos para uma curva de juros negativa ou invertida; a curva arqueada possui inclinação positiva para as taxas de curto prazo, essa tendência encontra um ponto de máximo no médio prazo a partir do qual inverte sua inclinação e “mergulha” em direção às maturidades mais longas, assim, seu desenho se assemelha a uma “corcunda”; no caso de pouca variação entre as taxas de curto e longo prazo, ou seja, quando as taxas curtas estão no mesmo nível das taxas longas, a curva estabiliza em determinado nível caracterizando um plano ou uma curva de rentabilidade fixa. Podemos visualizar o traçado destas curvas na FIGURA 1:

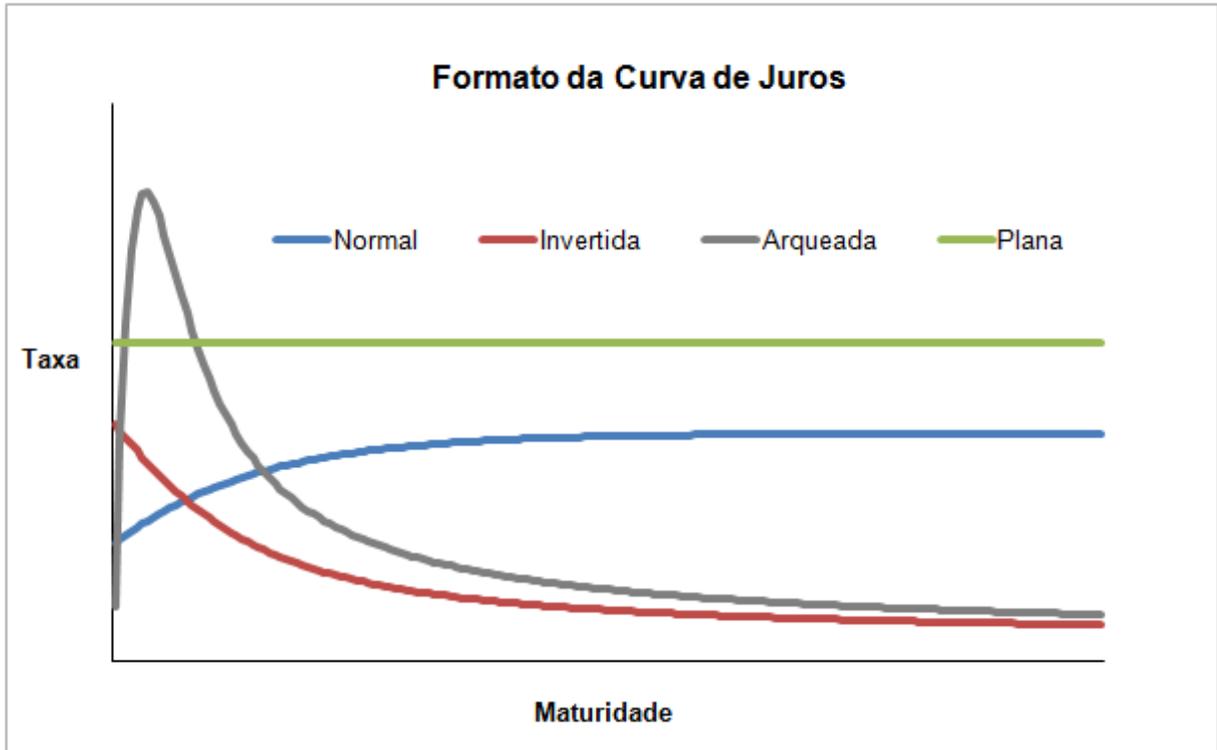


FIGURA 1 – Formato da Curva de Juros

Fonte: Do autor

Litterman e Scheinkman (1991) investigaram o comportamento dos títulos zero cupom do Tesouro Americano e os resultados sugerem enfaticamente que existem três principais atributos ou fatores que concorrem para variação (aproximadamente 98%) do retorno destes títulos e, por consequência, para movimentação da ETTJ: nível, inclinação e curvatura. Entendendo a ETTJ como uma função contínua no tempo provendo taxas para qualquer maturidade, podemos interpretar estas componentes da seguinte forma: o nível responde pelo movimento paralelo da curva fazendo com que as taxas se movimentem todas para uma mesma direção e com a mesma intensidade; a inclinação define se a curva é positiva ou negativa em relação a sua maturidade, indicando a velocidade do crescimento ou decrescimento das taxas, é representada pela primeira derivada em relação ao prazo; a curvatura é uma medida complementar da inclinação, indicando a aceleração do crescimento, no caso de inclinação positiva, ou a aceleração do decrescimento, no caso de inclinação negativa, é representada pela segunda derivada em relação ao prazo.

Wu (2003) representou graficamente o efeito que um choque positivo, em cada um dos fatores e de forma isolada, produz na curva de juros. Reproduzimos, a seguir, esta representação gráfica composta por três quadros: o quadro “A. Level” mostra o efeito de um choque no fator nível, a linha sólida representa a curva pré-choque e a linha tracejada representa a curva pós-choque, demonstrando o movimento paralelo na curva de juros ao

longo dos vencimentos; o quadro “B. Slope” mostra o efeito de um choque no fator inclinação, demonstrando que este fator tem forte influência nas taxas de curto prazo deixando a curva de juros menos inclinada; o quadro “C. Curvature” mostra o efeito de um choque no fator curvatura, demonstrando que este fator tem forte influência nas taxas de médio prazo; deixando a curva de juros mais “corcunda”. A FIGURA 2 traz a representação gráfica de Wu:

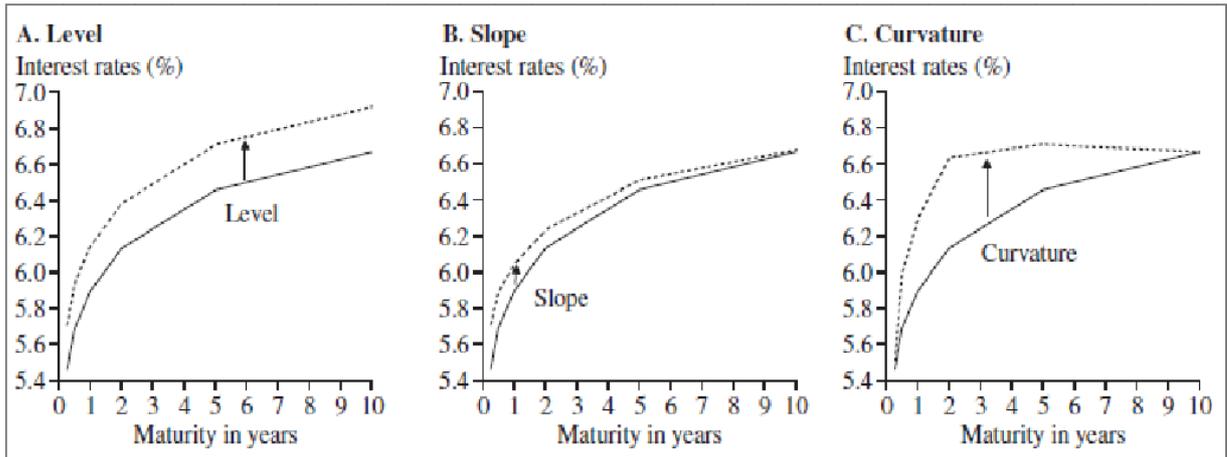


FIGURA 2 – Movimentação da Curva de Juros

Fonte: Wu (2003)

A ETTJ também pode ser representada graficamente em três dimensões, conforme GRÁFICO 2: um eixo para taxa de juros, um segundo eixo para as maturidades e um terceiro eixo para as datas em que a relação taxa de juro e maturidade foi estabelecida. Este gráfico permite visualizar a movimentação da curva de juros no tempo e compõe importante ferramenta para análise dinâmica da estrutura temporal da taxa de juros. Podemos caminhar em duas direções sobre a superfície produzida pelo gráfico, e que nos permitem fazer duas leituras da taxa de juros: 1) fixando-se uma data no tempo e observando-se a relação entre as taxas de juros e as maturidades, esta leitura é conhecida por *cross-section*; 2) fixando-se uma determinada maturidade e observando-se a evolução das taxas de juros em função do tempo (as datas em que foram compiladas), esta leitura configura uma série temporal. Segue GRÁFICO 2 em 3D para as taxas relativas aos contratos de *swap* DI-PRE negociados na BM&FBOVESPA:

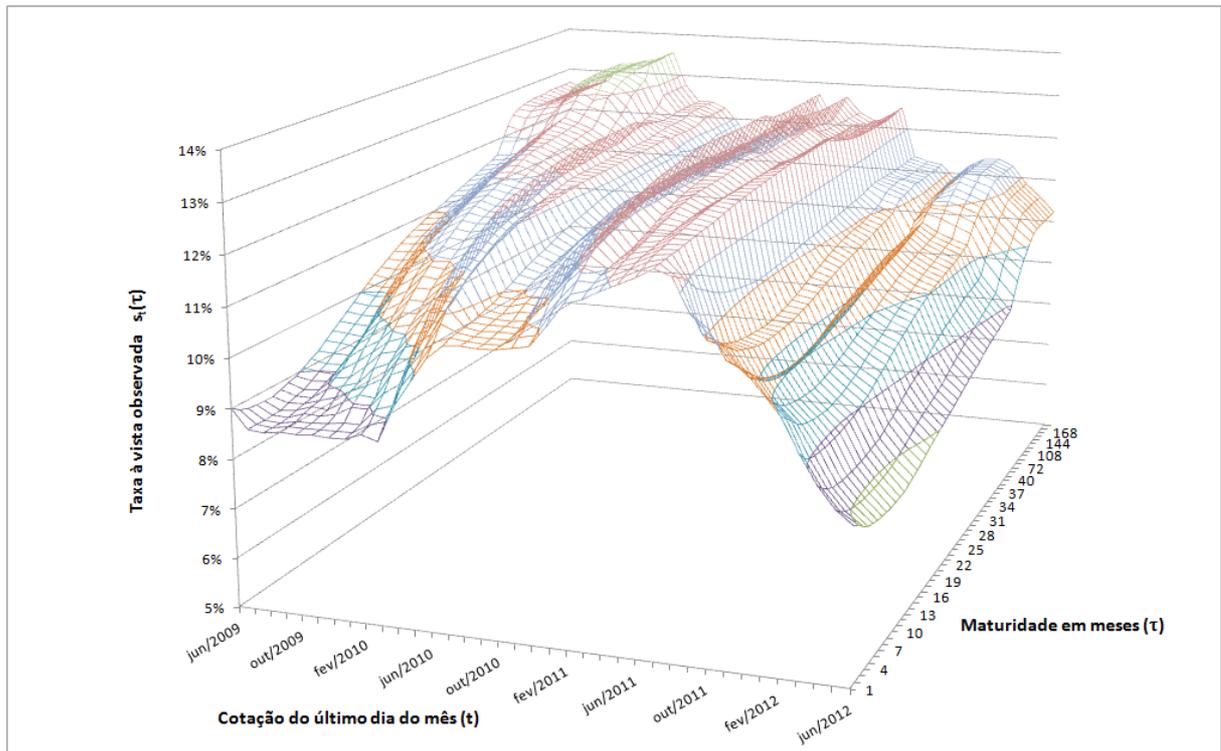


GRÁFICO 2 – Representação gráfica da ETTJ em três dimensões

Fonte: Do autor com base nas cotações das taxas de *swap* DI-PRE negociadas na BM&FBOVESPA

3.2 TEORIAS ECONÔMICAS SOBRE A ETTJ

Fabozzi (1997) indica as duas principais teorias que buscam explicar os formatos que a Estrutura a Termo da Taxa de Juros pode assumir: Teoria das Expectativas (*Expectations Theory*) e Teoria da Segmentação do Mercado (*Market Segmentation Theory*). A Teoria das Expectativas pode assumir três formas: Teoria das Expectativas Puras (*Pure Expectations Theory*), Teoria da Liquidez (*Liquidity Theory*) e Teoria pelo Habitat Preferido (*Preferred Habitat Theory*).

Além de explicar a forma que a ETTJ assume, as teorias devem estar aderentes a três fatos empíricos amplamente conhecidos:

1 – As taxas de juros se movimentam em bloco no tempo, elevando ou reduzindo seu nível para cada maturidade. Esta tendência pode ser observada no GRÁFICO 3 que representa as cotações de fechamento para o último dia útil do mês dos contratos de *swap* DI x Pré, negociados na BM&FBOVESPA.

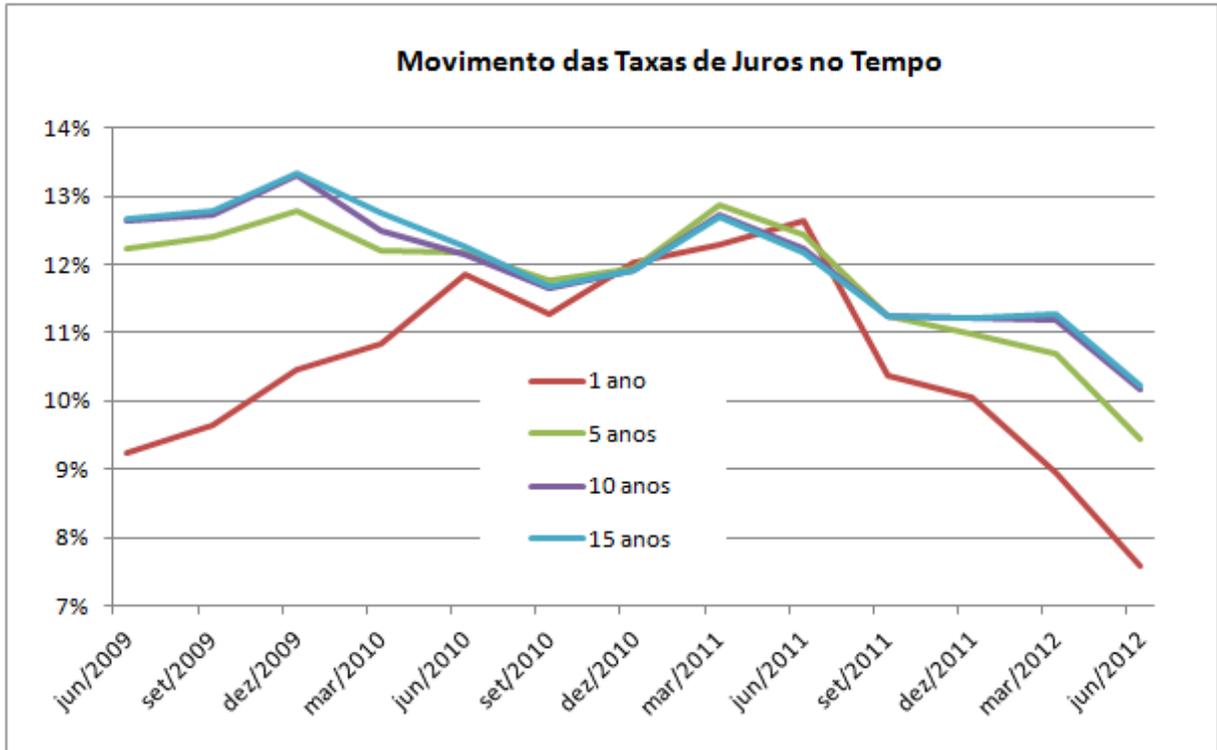


GRÁFICO 3 – Movimentação das taxas de juros no tempo

Fonte: Do autor com base nas cotações das taxas de *swap* DI-PRE negociadas na BM&FBOVESPA

2 – Quando as taxas de curto prazo são inferiores às taxas de longo prazo observa-se curva de juros positiva ou normal; quando ocorre o contrário, observa-se curva de juros negativa ou invertida.

3 – As curvas de juros, em geral, são positivas ou normais.

Veremos a seguir que as duas teorias são antagônicas em seus pressupostos e possuem poder de explicação parcial da curva de juros, de forma que a compreensão do comportamento da Estrutura a Termo da Taxa de Juros deve estar apoiada nestas duas visões que se complementam.

3.2.1 TEORIA DAS EXPECTATIVAS PURAS

A ideia de que a expectativa que os agentes econômicos têm em relação ao nível de taxas futuras explica o comportamento das taxas atuais foi inicialmente proposta por Fisher (1896) onde o autor define as taxas de juros de longo prazo como sendo a média das taxas de juros de curto prazo atuais e futuras.

De acordo com esta teoria, as taxas *forward* contratadas para o futuro serão definidas pela expectativa que os agentes têm em relação às taxas *spot* futuras, ou seja, a ETTJ

representa integralmente a expectativa do mercado com relação às taxas *spot* futuras. Assim, uma curva de juros com inclinação positiva (normal), indica que o mercado tem expectativa de taxas *spot* maiores no futuro e, para que isso aconteça, as taxas *forward* devem ser superiores às taxas *spot* a fim de sustentar o crescimento esperado pelo mercado. Quando ocorre o inverso, a curva de juros com inclinação negativa (invertida) indica que o mercado tem expectativa de taxas *spot* menores no futuro e, para que isso aconteça, as taxas *forward* devem ser inferiores às taxas *spot* a fim de sustentar o decréscimo esperado pelo mercado. No caso de uma curva de juros arqueada (“corcunda”), temos uma combinação das duas situações anteriores, sendo que no curto prazo as taxas *forward* encontram-se acima das taxas *spot* e no longo prazo se dá o contrário. A curva de juros plana (rendimento fixo) indica que o mercado tem expectativa de taxas *spot* constantes no futuro e, para que isso aconteça, as taxas *forward* devem se manter igualmente constantes a fim de sustentar o rendimento constante esperado pelo mercado. A FIGURA 3 ilustra as quatro situações:

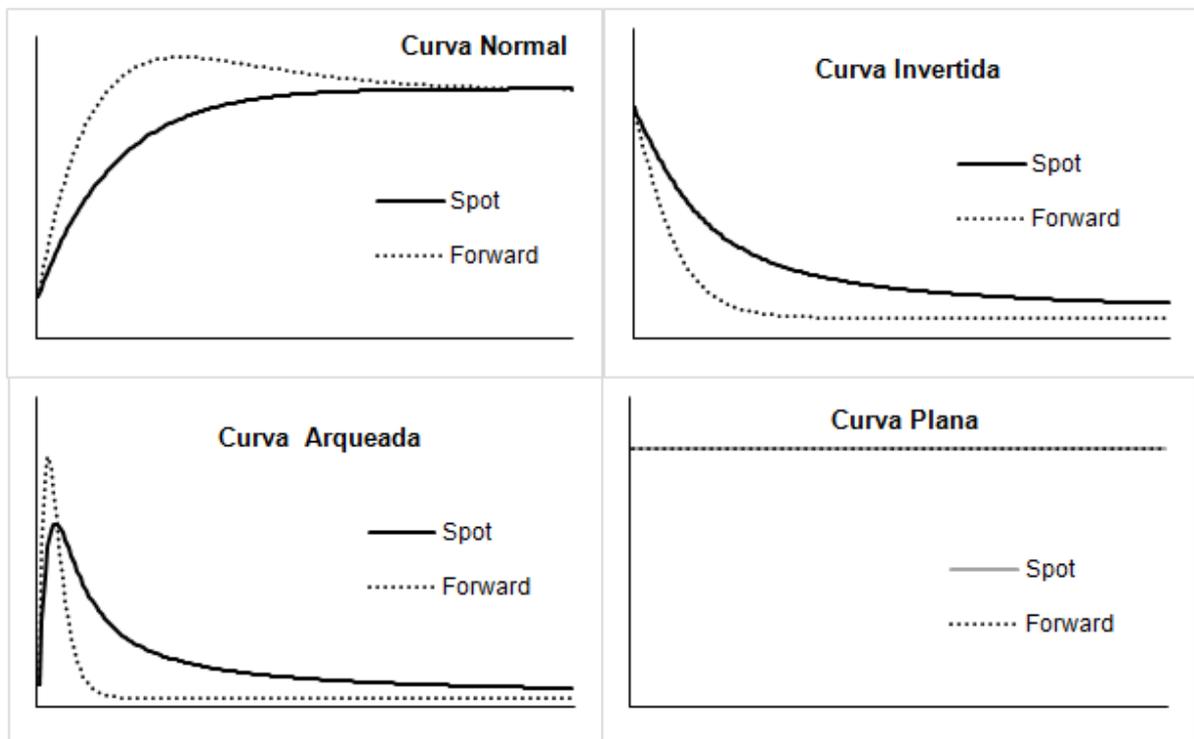


FIGURA 3 – Relação entre taxa *spot* e taxa *forward* na Teoria das Expectativas Puras

Fonte: Do autor

Se a Teoria das Expectativas Pura admite que as taxas *forward* sejam estimadores perfeitos das taxas *spot* futuras, então os preços dos títulos deveriam ser conhecidos sem incertezas. Segundo Fabozzi (1997), esta é a principal fragilidade da teoria: não levar em consideração os riscos de mercado ao se investir em títulos de renda fixa. São dois os riscos

envolvidos no retorno deste investimento: a oscilação do preço do título ao longo de sua vigência e a incerteza com relação às taxas de reinvestimentos.

A interpretação mais usual para a Teoria das Expectativas Pura é a de que o investidor espera que o retorno de sua aplicação seja o mesmo independente do prazo do investimento, fazendo com que títulos de curto prazo sejam substitutos perfeitos para títulos de longo prazo. Este é um ambiente de arbitragem e neutralidade ao risco. A interpretação matemática é a de que a taxa *spot* de um título de longo prazo será a média da taxa *spot* de um título de curto prazo atual e das taxas de juros *forward* para cada período até o vencimento, dessa forma, as taxas *forward* são estimativas não enviesadas das taxas *spot* esperadas pelo mercado. Por exemplo, seria equivalente investir em um título de cinco anos e mantê-lo até o vencimento, ou investir sequencialmente em cinco títulos de um ano, reinvestindo às taxas vigentes da época, ou investir em um título de dez anos e resgatar ao final do quinto ano. Os três investimentos produziriam a mesma rentabilidade, desconsiderando custos de transação. Algebricamente temos:

$$(1 + s_{k,t})^k = (1 + f_{(t,t+1),t}) \times (1 + f_{(t+1,t+2),t}) \times \dots \times (1 + f_{(t+k-1,t+k),t})$$

3.2.2 TEORIA DA LIQUIDEZ

Falamos que a principal fragilidade da Teoria das Expectativas Puras é não levar em consideração os riscos de mercado ao se investir em títulos de renda fixa, apesar de eles existirem e serem diretamente relacionados com a longevidade dos vencimentos. É natural que os investidores queiram rentabilidade maior para encarteirar títulos de longo prazo, pois a volatilidade dos preços aumenta com a maturidade.

Conforme Fabozzi (1997), foi John R. Hicks em 1946 quem propôs a Teoria da Liquidez que anula a fragilidade mencionada, incorporando um prêmio pela liquidez e fazendo com que os títulos de longo prazo paguem juros maiores do que a média das taxas futuras esperadas. Além disso, está implícito que o investidor é avesso ao risco e exige maior retorno para correr mais risco. De outra forma, as taxas *forward* devem refletir a expectativa das taxas *spot* mais um prêmio de liquidez e, este prêmio deve crescer com a maturidade dos títulos. É preciso esclarecer que o prêmio de liquidez representa, na verdade, um prêmio pela iliquidez que o investidor incorre ao imobilizar seu capital por um longo período. Algebricamente temos:

$$(1 + s_{k,t})^k = (1 + f_{(t,t+1),t}) \times (1 + f_{(t+1,t+2),t}) \times \dots \times (1 + f_{(t+k-1,t+k),t}) \times (1 + L_{k,t})$$

onde $L_{k,t}$ é o prêmio de liquidez cobrado pelos investidores pelo risco de aplicar em um título de k períodos.

Nesta teoria, as taxas *forward* são estimativas enviesadas das taxas *spot* esperadas pelo mercado, pois embutem uma margem de risco para pagar o prêmio pela liquidez. Por embutirem este carregamento, produzem uma estrutura a termo crescente, onde são esperadas curvas de juros positivamente inclinadas (normais). Curvas negativas (invertidas) ocorrem quando a expectativa do mercado com relação à queda das taxas *spot* supera o prêmio pela liquidez

3.2.3 TEORIA PELO HABITAT PREFERIDO

Conforme Fabozzi (1997), foram Modigliane, F. e Sutch, R. em 1966 que propuseram a Teoria pelo Habitat Preferido que, assim como a Teoria da Liquidez, admite a existência de um prêmio de risco, mas rejeita que este prêmio cresça proporcionalmente à maturidade. A Teoria pelo Habitat Preferido pressupõe que os agentes do mercado têm preferências por determinada região (habitat) da curva de juros. De fato, os tomadores de dinheiro estão interessados em emitir no longo prazo e os investidores em aplicar no curto prazo. Isto pode provocar um desequilíbrio entre a oferta e a demanda por títulos no habitat e a consequência deste desequilíbrio é que investidores e tomadores são motivados a trocar de habitat mediante uma compensação pelo risco assumido ao deixarem as maturidades de sua preferência. De acordo com a teoria, esta compensação pelo deslocamento é a medida do prêmio de risco, que pode ser positivo ou negativo, gerando curvas de juros de todos os formatos.

As três formas da Teoria das Expectativas têm em comum o pressuposto de que o mercado estabelece o preço dos títulos baseado na expectativa da taxa de juros futura, ou seja, a ETTJ representa integralmente a expectativa do mercado com relação às taxas *spot* futuras, que induz seu movimento de nível. As diferenças aparecem quando a Teoria das Expectativas Pura não admite um prêmio de risco associado à maturidade, ou seja, os investidores são indiferentes à maturidade não percebendo os riscos associados a ela. Sendo assim, a taxa *forward* é estimador não enviesado da taxa *spot*. Por sua vez, a Teoria da Liquidez embute um

carregamento para este risco na taxa de forma proporcional ao crescimento da maturidade e a Teoria pelo Habitat Preferido embute o carregamento em função da oportunidade de ganho que o habitat (vencimento) oposto à preferência do investidor esteja oferecendo naquele momento. Por embutirem um prêmio de risco nas taxas *forward*, as duas últimas formas da Teoria das Expectativas conduzem a estimadores enviesados ou tendenciosos da taxa *spot*.

3.2.4 TEORIA DA SEGMENTAÇÃO DO MERCADO

Conforme Fabozzi (1997), foi J. M. Culbertson em 1957 quem sugeriu a Teoria da Segmentação do Mercado. Esta teoria nega o pilar central da Teoria das Expectativas ao descartar que as expectativas do mercado tenham efeito sobre a formação da curva de juros, sendo a aversão ao risco o verdadeiro *drive* das taxas de juros ao longo das maturidades dos títulos. O princípio é o de que os agentes econômicos são avessos ao risco com forte preferência por operar em determinada região da curva de juros sem oportunidade de arbitragem entre as regiões. Esta preferência decorre de restrições impostas pela natureza de suas obrigações, que inviabilizam o deslocamento da região (habitat) preferida para outra com objetivo de se beneficiar de um diferencial de rendimento entre as regiões. A aversão a risco se justifica na medida em que o casamento entre ativo e passivo (*Asset Liability Management*) das empresas e instituições é mais importante do que aproveitar um diferencial de taxa em outra maturidade. Assim, os agentes estão confinados na região onde os vencimentos dos títulos atendem suas necessidades e as forças de oferta e demanda por estes títulos é que formatarão a curva de juros ao longo das maturidades.

Importantes participantes do mercado de renda fixa têm perfis diferentes de investimento. Por exemplo, os bancos precisam de liquidez e preferem aplicar no curto prazo para atender as demandas por saques. Já as entidades de previdência precisam estar hedgeadas no longo prazo para atender as demandas pelo pagamento dos benefícios das aposentadorias. Dessa forma, o mercado de títulos fica segmentado pela maturidade e as taxas de juros são determinadas pelo fluxo de fundos dentro de cada segmento. Os títulos de curto prazo não são substitutos para os títulos de longo prazo, criando uma ruptura entre estes dois mercados. Em geral, os investidores têm preferência em aplicar no curto prazo por oferecer menor risco de mercado, o que inflaciona os preços dos títulos com esta maturidade provocando a queda nas taxas de juros, que passam a ser comparativamente menores que as oferecidas pelos títulos de

longo prazo, induzindo curvas de juros positivamente inclinadas (normais). A segmentação de mercado proposta pela teoria pode ser visualizada graficamente na FIGURA 4:

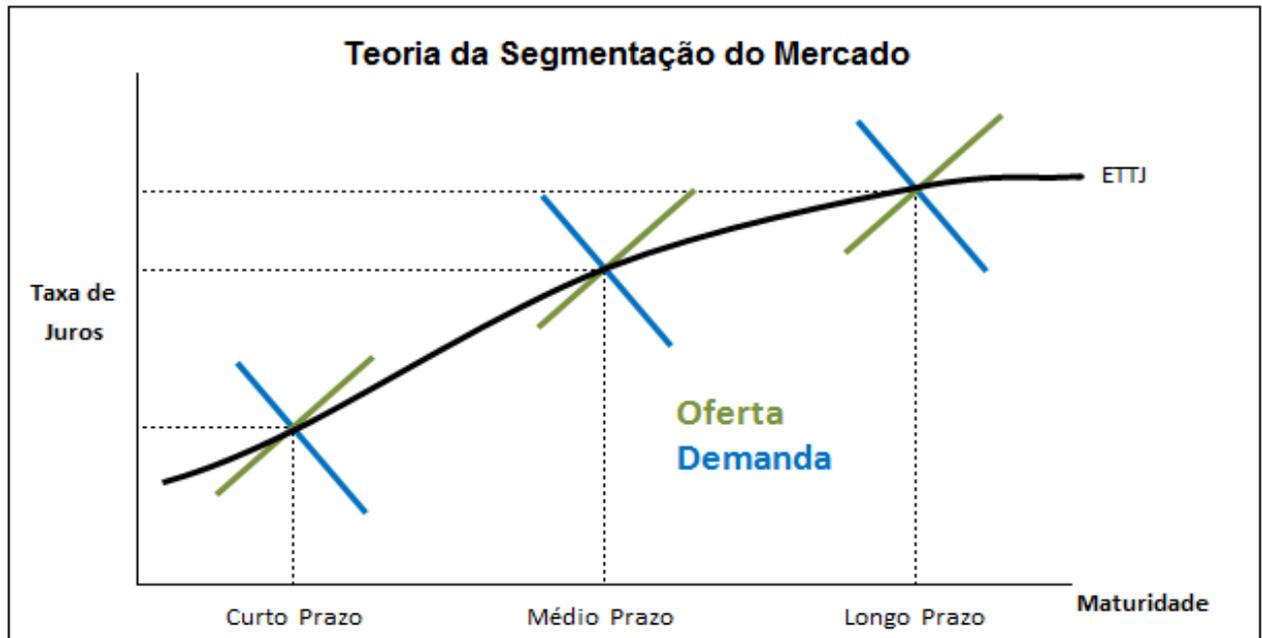


FIGURA 4 – Representação gráfica para Teoria da Segmentação do Mercado

Fonte: Do autor

3.3 MODELOS PARA CONSTRUÇÃO DA ETTJ

Nesta seção será apresentado um representante de cada uma das principais técnicas que a literatura especializada oferece para modelagem da taxa de juros: a técnica de interpolação por *Spline* Cúbico, o modelo paramétrico de Svensson e o modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek. Os modelos selecionados para este trabalho são fundamentados tecnicamente e amplamente adotados pelos praticantes de mercado.

Quando definimos ETTJ como sendo a relação temporal entre as taxas dos títulos zero cupom e suas respectivas maturidades, fizemos uma importante observação com relação as maturidades nas quais inexistem títulos vencendo. Esta observação se deve ao fato de que a estrutura a termo das taxas de juros não é diretamente observável, pois não encontramos oferta de títulos para todos os vencimentos possíveis. Ao plotarmos em um gráfico as maturidades dos títulos observados contra as respectivas taxas de juros, encontramos um conjunto discreto de pontos no tempo, porém é necessário que essa relação seja contínua, oferecendo taxas para qualquer maturidade. Esta é uma condição necessária para que os praticantes de mercado possam fazer avaliação e precificação de fluxos de caixa financeiro e o governo fazer a gestão de sua política monetária. Para isso, as maturidades onde não forem encontrados títulos deverão ter suas taxas estimadas através de modelos.

Dada a importância da Estrutura a Termo da Taxa de Juros e a dificuldade de ser observada diretamente, muitos pesquisadores vêm se dedicando ao longo dos últimos anos ao estudo de sua modelagem. As duas principais linhas de pesquisa nesta área podem ser classificadas como modelos de equilíbrio ou não arbitragem e modelos estatísticos. Arbitragem é a operação simultânea de compra e venda de um mesmo ativo em dois mercados diferentes que apresentem preços vantajosamente diferentes. A hipótese da arbitragem tem papel central na teoria dos mercados eficientes. Dado que os investidores operam de forma racional, quando isso não acontece, a arbitragem traz os preços para seus fundamentos, ou seja, os preços de equilíbrio são os preços de não arbitragem. Segundo Vieira Neto:

A estratégia de arbitragem representa a possibilidade de se ganhar uma quantidade ilimitada de dinheiro sem custo e sem risco algum. Numa economia povoada por investidores que preferem mais riqueza a menos riqueza, as combinações de preços que propiciam estratégias de arbitragem tendem a desaparecer rapidamente (VIEIRA NETO, 1999, p 15).

Os modelos de equilíbrio ou não arbitragem tratam a evolução de variáveis macroeconômicas fundamentais à explicação das taxas de juros. Quando envolvem apenas uma variável são chamados de unifatoriais e quando envolvem mais do que uma variável são chamados de multifatoriais. A estrutura do modelo impõe restrições de consistência interna, que assegura a inexistência de oportunidade de arbitragem no mercado, especificando um processo gerador das taxas de juros de curto prazo, normalmente na forma de um processo de difusão envolvendo equação diferencial estocástica para variáveis de estado da economia, cujos parâmetros devem ser estimados. Como resultado, o modelo produz um funcional onde encontramos a relação entre a taxa de juros e suas maturidades para qualquer dia.

O que diferencia os modelos de equilíbrio dos modelos de não arbitragem é que este último utiliza a estrutura a termo inicialmente observada como um *input* (dado), enquanto que os modelos de equilíbrio irão estimá-la (resultado). Ao tratar a estrutura a termo inicialmente observada de forma exógena, os modelos de não arbitragem irão replicar a curva observada quando estimarem a curva teórica para a data corrente. Tratando de forma endógena a estrutura a termo inicialmente observada, não é esperado que a curva de juros estimada pelos modelos de equilíbrio, para data corrente, se ajuste perfeitamente à curva de juros observada. É importante ressaltar que, em relação ao ajuste da curva de mercado os modelos de equilíbrio não são considerados livre de arbitragem, mas com relação à precificação eles são considerados livre de arbitragem, pois sua estrutura impõe restrições de consistência interna que asseguram a inexistência de oportunidade de arbitragem no mercado. Os pioneiros na

modelagem de equilíbrio foram Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985). O primeiro modelo de não arbitragem veio por Ho e Lee (1986), seguido por Hull e White (1990).

A família de modelos estatísticos não faz uma interpretação estrutural do problema, ao invés disso, define uma expressão matemática que tenha a capacidade de descrever toda a Estrutura a Termo da Taxa de Juros para uma determinada data (*cross-section*). Os modelos estatísticos podem ser classificados como paramétricos e não-paramétricos (*spline*), conforme *Bank for International Settlements - BIS* (2005, p. 6) “*such models can broadly be categorized into parametric and spline-based approaches, where a different trade-off between the flexibility to represent shapes generally associated with the yield curve (goodness-of-fit) and the smoothness characterizes the different approaches*”. A classe de modelos não-paramétricos busca um ajuste exato da curva de juros estimada com a curva de juros observada, ou seja, a curva estimada passa exatamente pelos pontos observados. Utiliza-se a técnica de *spline*, que concatena um conjunto de funções, para a interpolação por partes dos pontos observados, sendo o *spline* cúbico (polinômio de terceiro grau) o mais indicado por produzir uma curva flexível e suave. Os modelos paramétricos não impõem o ajuste exato da curva de juros estimada com a curva de juros observada, ou seja, a curva de juros estimada é aquela que melhor descreve as taxas observadas sem necessariamente passar por elas. Para isso é definida uma função matemática parcimoniosa em seus parâmetros, de fácil implementação e que reproduza os formatos das curvas de juros previstas pela teoria econômica. Os parâmetros desta função são ajustados a partir dos dados observados, buscando sempre minimizar as diferenças entre as taxas interpoladas e as taxas efetivamente observadas. Os principais representantes desta classe de modelos são Nelson e Siegel (1987) e Svensson (1994). De acordo com BIS:

The underlying principle of parametric models, also referred to as function-based models, is the specification of a single-piece function that is defined over the entire maturity domain. Whilst the various approaches in this class of models advocate different choices of this function, they all share the general approach that the model parameters are determined through the minimisation of the squared deviations of theoretical prices from observed prices (BIS, 2005, p. vi).

Rather than specifying a single functional form over the entire maturity range, spline-based methods fit the yield curve by relying on a piecewise polynomial, the spline function, where the individual segments are joined smoothly at the so-called knot points. Over a closed interval, a given continuous function can be approximated by selecting an arbitrary polynomial, where the goodness-of-fit increases with the order of the polynomial (BIS, 2005, p. 8).

3.3.1 MODELO PARAMÉTRICO DE SVENSSON

Os modelo de Nelson e Siegel (1987) e de Svensson (1994), uma extensão de Nelson-Siegel, são modelos paramétricos onde uma função matemática, parcimoniosa em seus parâmetros e de fácil implementação, reproduz os formatos das curvas de juros previstas pela teoria econômica. De acordo com BIS (2005, p. 9), este é o modelo preferido pelos Bancos Centrais que informam sua ETTJ ao *Bank for International Settlements*, “*To estimate the term structure of interest rates, most central banks reporting data have adopted either the Nelson and Siegel or the extended version suggested by Svensson*”. Além disso, Svensson foi o modelo adotado pela SUSEP para construir a ETTJ do mercado segurador brasileiro,

O Modelo de **Nelson e Siegel** (1987). Adotaremos a interpretação que Diebold e Li (2006) deram para o modelo estático de Nelson e Siegel (1987) que parcimoniosamente faz a interpolação *cross-section* da curva de juros. Neste modelo a taxa *forward* instantânea foi definida como a soma de três parcelas: uma constante, uma função com decaimento exponencial e uma função de Laguerre (produto de um polinômio com uma exponencial):

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} e^{-\lambda_t \tau} + \beta_{3,t} \lambda_t \tau e^{-\lambda_t \tau}$$

Fazendo a média das taxas *forward* (integral das taxas *forward* entre a data inicial t e a data final τ dividido pelo prazo total), conseguimos a curva de juros *spot*:

$$s_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right] + \beta_{3,t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right]$$

O modelo também assume a forma de uma curva de desconto que inicia valendo um na maturidade zero, e tende a zero quando as maturidades tendem ao infinito. O parâmetro λ controla a velocidade do decaimento exponencial. Valores baixos para λ produzem um decaimento lento e ajustam melhor as maturidades mais longas. Valores altos para λ produzem um decaimento acelerado e ajustam melhor as maturidades mais curtas. Além disso, λ indica onde a carga (*loading*) de β_3 , $[(1 - e^{-\lambda_t \tau} / \lambda_t \tau) - e^{-\lambda_t \tau}]$, atinge seu ponto máximo.

Embora o modelo de Nelson-Siegel tenha sido planejado como *cross-section*, ou seja, com a capacidade de gerar uma curva para cada data sem levar em consideração a evolução intertemporal da estrutura a termo, Diebold e Li (2006) mostraram que os parâmetros β_1 , β_2 e β_3 podem ser interpretados como fatores dinâmicos latentes (não diretamente observáveis) da curva de juros, calibrados pelas cargas (*loadings*) que

multiplicam cada um dos fatores. O parâmetro β_1 pode ser visto como um fator de longo prazo, pois sua carga tem valor unitário (1) e se mantém constante ao longo de todas as maturidades. O parâmetro β_2 pode ser visto como um fator de curto prazo, pois sua carga assume a forma $[1 - e^{-\lambda_t \tau} / \lambda_t \tau]$, uma função que inicia em um e decai de forma rápida e monotonicamente para zero. Quando β_2 for positivo a curva de juros será decrescente, quando for negativo a curva de juros será crescente. O parâmetro β_3 pode ser visto como um fator de médio prazo, pois sua carga assume a forma $[(1 - e^{-\lambda_t \tau} / \lambda_t \tau) - e^{-\lambda_t \tau}]$, uma função que inicia em zero, e por isso não está associada ao curto prazo. Esta carga cresce até atingir um ponto máximo na região das maturidades de médio prazo, decrescendo até zero e por isso também não está associada ao longo prazo. Quando β_3 for negativo a curva de juros será arqueada em forma de “U”, quando for positivo a curva de juros será arqueada em forma de “U” invertido. As cargas (*loadings*) podem ser representadas graficamente. O GRÁFICO 4 mostra a evolução das cargas ao longo das maturidades, para $\lambda = 3,58$:

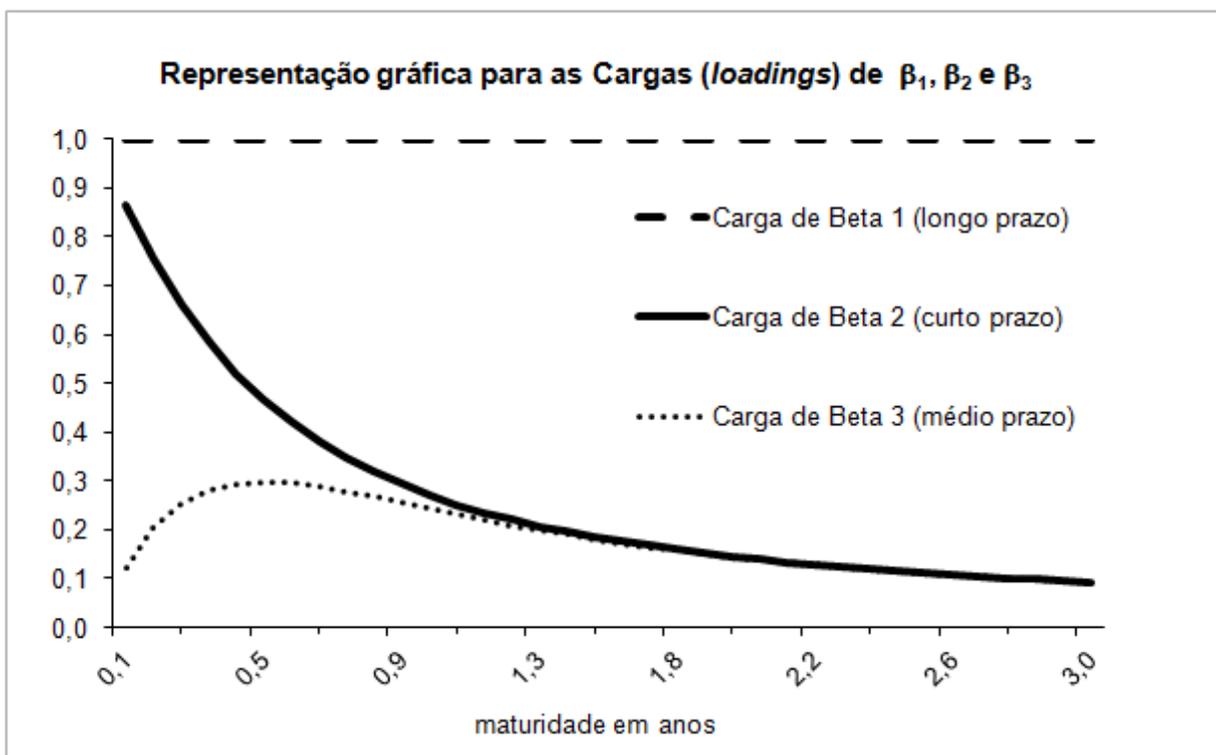


GRÁFICO 4 – Representação gráfica para as cargas (*loadings*) do modelo Nelson-Siegel

Fonte: Do autor

Este tratamento dinâmico dado ao modelo por Diebold e Li (2006), em que os parâmetros são vistos como fatores variantes no tempo, ainda permite associar β_1 , β_2 e β_3 aos movimentos observados da curva de juros - nível, inclinação e curvatura, respectivamente - em linha com o estudo de componentes principais desenvolvido por Litterman e Scheikman

(1991). O parâmetro de longo prazo β_1 comanda o nível da curva de juros. Uma variação de determinada intensidade em β_1 tem impacto direto e de mesma intensidade nas taxas de todas as maturidades, mudando o nível da curva de juros que está relacionado com a média das taxas por maturidade. A associação de β_1 com as taxas de longo prazo se verifica quando levamos a maturidade ao limite: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} s_t(\tau) = \beta_{1,t}$. O parâmetro de curto prazo β_2 está fortemente relacionado com a inclinação da curva de juros, ou seja, ele mostra se a curva é crescente ou decrescente ao longo das maturidades. Uma variação em β_2 impacta de forma mais expressiva as taxas de curto prazo do que as taxas de longo prazo, visto que aquelas carregam um peso maior no fator de curto prazo $[1 - e^{-\lambda_t \tau} / \lambda_t \tau]$, impactando a inclinação da curva de juros. Verifica-se que a taxa instantânea de juros depende dos dois fatores: $\lim_{\tau \rightarrow 0} s_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t}$, como $s_t(\infty) = \beta_{1,t}$, então, se fizermos $s_t(\infty) - s_t(0)$ chegamos em $-\beta_{2,t}$, que é outra interpretação para este parâmetro. O parâmetro de médio prazo β_3 está fortemente relacionado com a curvatura da curva de juros, ou seja, indica a velocidade com que a curva está crescendo ou decrescendo. Uma variação em β_3 tem pouco efeito nas taxas de curto ou longo prazo, atuando de forma mais expressiva nas taxas de médio prazo, visto que estas carregam um peso maior no fator de médio prazo $[(1 - e^{-\lambda_t \tau} / \lambda_t \tau) - e^{-\lambda_t \tau}]$, impactando a curvatura da curva de juros.

Vimos que o modelo proposto é bastante flexível e, com a escolha apropriada dos parâmetros, tem a capacidade de replicar os principais fatos estilizados historicamente observados da curva de juros: 1) A curva de juros é, em geral, crescente e côncava (refletindo a tendência central de cada parâmetro estimado), podendo assumir uma variedade de formas no tempo como invertida e arqueada (refletindo a dispersão de cada parâmetro estimado); 2) Existe uma persistência temporal entre as taxas de mesma maturidade, sendo as taxas de longo prazo mais dependentes do passado que as taxas de curto prazo. Da mesma forma se verifica uma maior persistência na dinâmica das taxas de juros do que na dinâmica dos *spreads* das taxas de juros, fazendo com que o parâmetro de longo prazo β_1 (nível) seja mais dependente do passado que o parâmetro de curto prazo β_2 (inclinação); 3) A volatilidade das taxas decresce com a maturidade.

De Pooter (2007) menciona os principais motivos que tornaram Nelson-Siegel um dos modelos mais utilizados para estimação da Estrutura a Termo da Taxa de Juros: 1) Uma única função, parcimoniosa, suave e flexível tem a capacidade de replicar grande parte das formas que a curva de juros pode assumir; 2) Este modelo serviu de base para inúmeros

outros pesquisadores que, reconhecendo seu potencial descritivo, incorporaram mais flexibilidade à função original; 3) A abordagem dinâmica dada por Diebold e Li (2006) mostrou que o modelo de Nelson-Siegel além de ser economicamente representativo (nível, inclinação e curvatura da curva de juro), produz boas extrapolações, principalmente no longo prazo; 4) Estudo realizado em 2005 pelo *Bank of International Settlements* revelou que nove entre treze bancos centrais, que reportam sua metodologia de cálculo, utilizam Nelson-Siegel ou suas variações para construção da curva de juros BIS (2005); 5) A classe de modelos Nelson-Siegel é uma das mais utilizadas pelos praticantes de mercado; 6) Apesar de suas qualidades, as críticas mais frequentes ao modelo são as de que não garante condições de não arbitragem e a dificuldade de se estabilizar uma otimização não linear.

O Modelo de **Svensson** (1994). Mesmo sendo bastante flexível, o modelo de Nelson-Siegel não captura todas as formas que a curva de juros pode assumir, principalmente aquelas que apresentam mais de uma mudança na inclinação ou na curvatura. Também se verifica a tendência de produzir ajustes muito estáveis no longo prazo, dificultando sua aderência a curvas mais instáveis nesta região. Svensson (1994) propôs uma extensão ao modelo que aumentou sua flexibilidade ao adicionar uma segunda componente de médio prazo, permitindo que se forme uma segunda corcova na forma da curva de juros, porém com fator de decaimento próprio. Este refinamento na flexibilidade da curva veio com o custo de se estimar mais dois parâmetros: β_4 e λ_2 . A formulação estendida, já considerando a dinâmica temporal, fica:

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} e^{-\lambda_{1,t}\tau} + \beta_{3,t} \lambda_{1,t} \tau e^{-\lambda_{1,t}\tau} + \beta_{4,t} \lambda_{2,t} \tau e^{-\lambda_{2,t}\tau}$$

$$s_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_{1,t}\tau}}{\lambda_{1,t}\tau} \right] + \beta_{3,t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_{1,t}\tau}}{\lambda_{1,t}\tau} - e^{-\lambda_{1,t}\tau} \right] + \beta_{4,t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_{2,t}\tau}}{\lambda_{2,t}\tau} - e^{-\lambda_{2,t}\tau} \right]$$

As mesmas interpretações dadas aos parâmetros de Nelson-Siegel se aplicam para o modelo proposto por Svensson. Neste caso, β_1 é a componente de longo prazo que governa o movimento de nível da curva de juros, β_2 é a componente de curto prazo que governa o movimento de inclinação da curva de juros e β_3 e β_4 são as componentes de médio prazo que governam o movimento de curvatura da curva de juros. Finalmente, λ_1 e λ_2 indicam a velocidade do decaimento das componentes de médio prazo β_3 e β_4 e em que maturidade suas respectivas cargas atingem os valores máximos. A taxa *spot* de curto prazo vem do limite $s_t(0) = \beta_{1t} + \beta_{2t}$, e a taxa *spot* de longo prazo vem do limite $s_t(\infty) = \beta_{1t}$. Os parâmetros λ_1 e

λ_2 comandam a velocidade da transição entre as taxas de curto e longo prazo e também a forma (corcova) que a curva de juros assume nesse período. O GRÁFICO 5 mostra a evolução das cargas ao longo das maturidades, para $\lambda_1 = 3,58$ e $\lambda_2 = 7,16$:

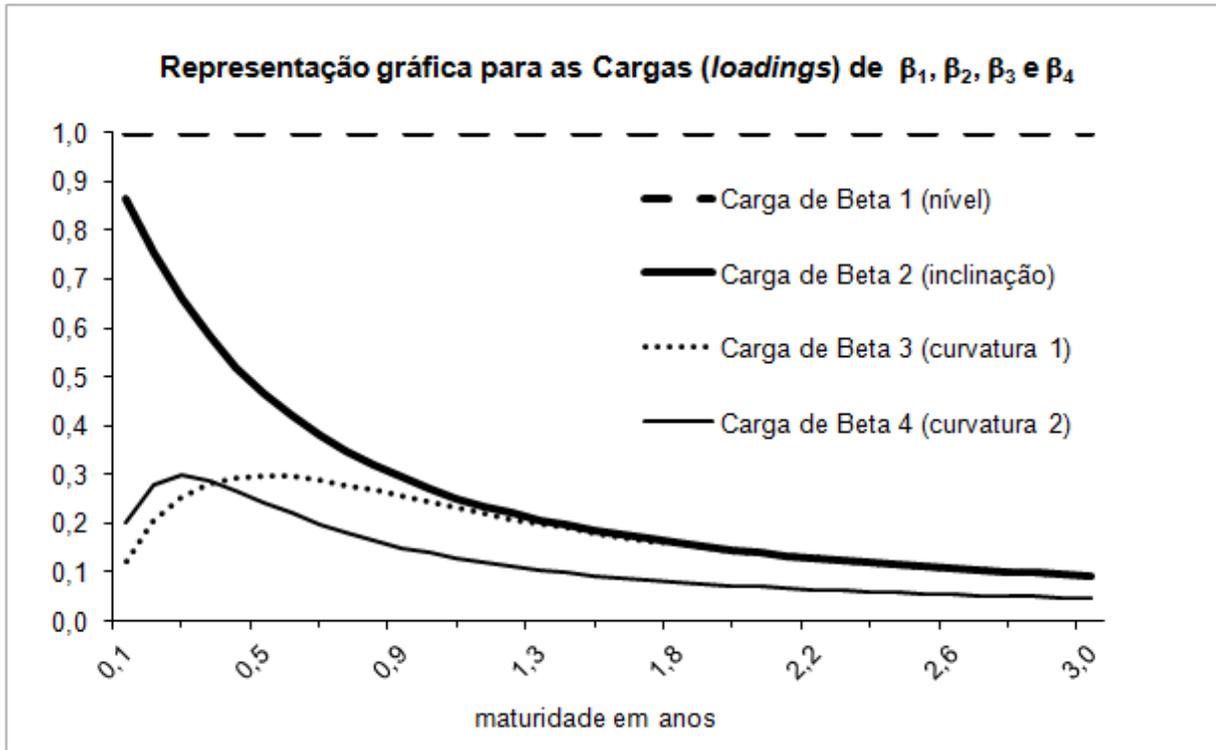


GRÁFICO 5 – Representação gráfica para as cargas (*loadings*) do modelo Svensson

Fonte: Do autor

Estimativa dos Parâmetros do Modelo. A estimativa simultânea dos quatro parâmetros ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e λ_1) ou dos seis parâmetros ($\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \lambda_1$ e λ_2) dos modelos pode ser feita por alguma técnica de otimização não linear, tradicionalmente mínimos quadrados não lineares ou máxima verossimilhança. O problema com esta técnica é que ela pode estimar os parâmetros para mínimos locais, situação agravada pela quantidade reduzida das taxas observadas, deixando escapar o mínimo global que seria o ponto ótimo do processo e conduzindo a um ajuste inadequado da curva de juros, ou seja, corremos o risco de cair em uma falsa convergência. Além disso, as técnicas não lineares tradicionais são extremamente sensíveis ao conjunto inicial de valores utilizados nos algoritmos, causando oscilação entre as curvas de juros estimadas para uma mesma data e entre os parâmetros estimados para datas diferentes.

Uma forma simples de contornar esta situação é fixar arbitrariamente os parâmetros não lineares da função, λ_1 e λ_2 , passando para um problema de otimização linear por mínimos quadrados ordinários que não requer valores iniciais para os estimadores e sempre conduz ao

mínimo global. Esta solução foi adotada por vários pesquisadores, entre eles Diebold e Li (2006) e Pooter (2007). Entretanto, a linearização da função, pela fixação do parâmetro λ para todas as datas observadas, pode limitar a capacidade do modelo se ajustar às alterações no decaimento que a curva de juros apresenta ao longo do tempo. Formas alternativas para estimativa simultânea dos parâmetros foram propostas por Laurini e Hotta (2007) que sugerem métodos bayesianos baseados em Markov Chain Monte Carlo; Associação Nacional das Instituições do Mercado Financeiro - Andima (2010) que utiliza algoritmo genético (um algoritmo de busca inspirado na biologia evolutiva e aplicável a diferentes situações) e Maciel, Gomide e Ballini (2011) que propõe a utilização de um Algoritmo de Evolução Diferencial.

Além da técnica utilizada na estimação dos parâmetros é preciso decidir sobre qual variável será modelada: o preço ou a taxa do título. Segundo Franklin et al. (2011), quando o objeto for o preço do título, a função desconto $P(\tau)$ é estimada para cada ponto observado da curva de juros, de acordo com a equação do modelo, e executa-se um algoritmo de otimização com o objetivo de minimizar a soma dos quadrados dos erros entre os preços estimados e observados. Quando o objeto for a taxa *spot* do título a função $s(\tau)$ é estimada para cada ponto observado da curva de juros, de acordo com a equação do modelo, e executa-se um algoritmo de otimização com o objetivo de minimizar a soma dos quadrados dos erros entre as taxas estimadas e observadas. Também é importante observar que os preços dos títulos de longa maturidade são mais sensíveis à variação nas taxas de juros do que os preços dos títulos de curta maturidade e, de forma contrária, as taxas dos títulos de longa maturidade são menos sensíveis à variação nos preços do que as taxas dos títulos de curta maturidade.

Por fim, esses autores alertam que a decisão sobre qual variável modelar tem importante implicação no procedimento de minimização da soma do erro quadrático. Se o objeto da estimação for o preço do título, os resíduos ou erros serão homocedásticos (resíduos se mantêm constante ao longo das maturidades) nos preços e heterocedásticos (resíduos diminuem com a maturidade) nas taxas. Uma forma para contornar a heterocedasticidade nas taxas é ponderar o erro quadrático do preço de cada título pelo inverso da *duration* de Macaulay, dando mais peso para os erros dos títulos de curto prazo. Se o objeto da estimação for a taxa de juros *spot*, os resíduos ou erros serão homocedásticos (resíduos se mantêm constante ao longo das maturidades) nas taxas e heterocedásticos (resíduos aumentam com a maturidade) nos preços. Como nosso objetivo é modelar uma estrutura a termo para taxas de

juros, é desejável que os resíduos sejam homocedásticos nas taxas de juros, o que implica em heterocedasticidade nos preços.

Utilizaremos a solução adotada por Diebold e Li (2006) para estimação dos parâmetros do modelo: fixaremos os parâmetros não lineares da função, λ_1 e λ_2 , o que nos leva a um problema de otimização linear que será resolvido por mínimos quadrados ordinários.

3.3.2 TÉCNICA DE INTERPOLAÇÃO POR *SPLINE* CÚBICO

Conforme Varga (2009), a abordagem puramente matemática para estimação das taxas de juros das maturidades não observadas consiste em fazer a “ligação” entre as taxas de juros das maturidades observadas através de polinômios algébricos do tipo:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_nx^n$$

Se tivermos apenas dois pontos observados é possível estabelecer uma relação linear exata entre as variáveis, maturidade e taxa, determinando-se os parâmetros (a_0 e a_1) do polinômio de primeiro grau $P(x) = a_0 + a_1x$. Este mesmo polinômio não teria a capacidade de interpolar três pontos não alinhados. Para fazer esta interpolação precisamos de um polinômio de segundo grau, que estabelece uma relação quadrática exata entre as variáveis, maturidade e taxa, ao se determinar os parâmetros (a_0 , a_1 e a_2) da função $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. De forma análoga, só conseguimos um ajuste exato para quatro pontos através da determinação dos parâmetros (a_0 , a_1 , a_2 e a_3) da função cúbica $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Assim, é possível se chegar a um ajuste tão bom quanto se queira pela adição de mais graus à função interpolante, pois sempre é possível obter um polinômio que passe por todos os pontos de uma função definida em um intervalo (teorema da aproximação de Weierstrass). Porém, polinômios de alto grau são muito instáveis, característica indesejada para geração de uma curva de juros, o que restringe sua aplicação.

Uma forma de contornar este problema é fazer a interpolação das taxas observadas por intervalos de vencimento (vértices), a fim de se obter grupos com poucos pontos e, por consequência, polinômios de menor grau. Esta técnica de segmentação polinomial (*piecewise*) é conhecida por *spline*, que ao fazer a interpolação com vários polinômios de menor grau diminui a instabilidade na curva de juros. Assim, a técnica de *spline* encaixa diferentes funções para cada segmento da curva de juros respeitando condições de contorno que

garantam a continuidade e a suavidade da aproximação: nos vértices onde ocorrem as ligações entre os polinômios, a primeira derivada, a segunda derivada e o resultado do polinômio anterior devem ser iguais à primeira derivada, à segunda derivada e o resultado do polinômio posterior, respectivamente.

Novamente passamos a discutir o grau do polinômio que será utilizado nesta técnica. Uma interpolação seccionada linear, que liga os vértices por uma reta, apresenta o inconveniente de não ser diferenciável nos vértices e por isso não garante a suavidade da aproximação, evoluindo a curva de juros com saltos. Adicionando-se mais um grau passamos para uma interpolação seccionada quadrática, que liga os vértices por uma parábola, onde é possível condicionar a continuidade da primeira derivada nos vértices, mas não da segunda derivada, propriedade desejável nesta aplicação. Adicionando-se mais um grau passamos para uma interpolação seccionada cúbica, onde é possível se impor todas as condições necessárias. Representamos uma função polinomial por partes da seguinte forma:

$$P(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{para } x_1 \leq x \leq x_2 \\ P_2(x) & \text{para } x_2 \leq x \leq x_3 \\ P_3(x) & \text{para } x_3 \leq x \leq x_4 \\ \vdots & \\ P_{n-1}(x) & \text{para } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

onde x representa as maturidades que estão sendo segmentadas e $P(x)$ é o polinômio seccionado cúbico natural que representa a taxa *spot* para qualquer maturidade:

$$\begin{aligned} P_j(x) &= a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \\ P'_j(x) &= b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \\ P''_j(x) &= 2c_j + 6d_j(x - x_j) \end{aligned}$$

Quando $x = x_j$, ou seja, quando a maturidade estimada coincidir com a maturidade observada, o resultado do polinômio fica:

$$\begin{aligned} P_j(x) &= a_j & \text{para } j = 1, \dots, n \\ P'_j(x) &= b_j & \text{para } j = 1, \dots, n - 2 \\ P''_j(x) &= 2c_j & \text{para } j = 1, \dots, n - 2 \end{aligned}$$

O objetivo da técnica de *spline* é desenvolver um polinômio deste tipo para cada intervalo entre os pontos conhecidos. Assim, para n taxas observadas teremos $n-1$ intervalos e, conseqüentemente, $n-1$ polinômios que demandam quatro parâmetros cada (a_j , b_j , c_j e d_j), totalizando $4(n-1)$ incógnitas a serem determinadas. Dessa forma, $4(n-1)$ condições são

necessárias para solução deste sistema. Sendo $f(x)$ uma taxa efetivamente observada na maturidade x , as condições de contorno necessárias são:

- a) $P(x_j) = f(x_j) = a_j$ para $j = 1, \dots, n$ n condições
 b) $P_{j+1}(x_{j+1}) = P_j(x_{j+1}) = a_{j+1}$ para $j = 1, \dots, n - 2$ $n - 2$ condições
 c) $P'_{j+1}(x_{j+1}) = P'_j(x_{j+1}) = b_{j+1}$ para $j = 1, \dots, n - 2$ $n - 2$ condições
 d) $P''_{j+1}(x_{j+1}) = P''_j(x_{j+1}) = 2c_{j+1}$ para $j = 1, \dots, n - 2$ $n - 2$ condições
 e) $P''(x_1) = P''(x_n) = 0$ 2 condições

A restrição a impõe que a função interpolante passe pelos pontos observados, a restrição b garante a continuidade da interpolação nos vértices intermediários, a restrição e é o contorno livre ou natural utilizado quando não se conhece a segunda derivada no vértice inicial e final e as restrições c e d indicam que a função de interpolação é totalmente diferenciável, condição fundamental para garantir a continuidade da taxa *forward*. Por fim, vimos que nos vértices intermediários observados a função *spline*, sua primeira derivada e sua segunda derivada correspondem aos parâmetros a_{j+1} , b_{j+1} e $2c_{j+1}$, respectivamente. Resolvendo estas equações em relação aos parâmetros e fazendo sistematicamente suas substituições, chegamos ao seguinte sistema linear tridiagonal de equações válido para todo $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$, cuja solução determina o conjunto de parâmetros para cada $P_j(x)$:

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3(a_{j+1} - a_j)}{h_j} - \frac{3(a_j - a_{j-1})}{h_j - 1} \quad \text{onde } h_j = x_{j+1} - x_j$$

A solução do sistema de equações que nos leva ao conjunto de polinômios interpolantes pode ser obtida através de algoritmos construídos para este fim, e que são facilmente encontrados na literatura técnica sobre interpolação. Sugerimos Varga (2000) que apresenta um algoritmo facilmente implementado em *Visual Basic* e que pode ser transformado em uma função residente em planilha *Excel*.

A técnica de *spline* tem a seu favor o fato de que consegue replicar com suavidade e precisão a movimentação da curva de juros decorrente das mudanças na inclinação e na curvatura. Por outro lado, pode gerar taxas extrapoladas indefinidamente crescentes ou decrescentes, conforme Diebold e Li (2006, p. 340) “*Hence such curves provide a poor fit to yield curves that are flat or have a flat long end, which requires an exponentially decreasing discount function.*” Ainda, Caldeira faz os seguintes comentários:

Esse método pode satisfatoriamente ser implementado para curvas com um conjunto denso de vértices, mas é qualitativamente não satisfatório para curvas com um conjunto de vértices mais esparsos. A curva é muito convexa entre os pontos que estão mais

distantes uns dos outros. Em particular, este método não garante que curvas *forward* negativas não aconteçam. Outra desvantagem bem conhecida do *cubic spline* é que as estimativas das taxas *forward* podem ser bastante instáveis, especialmente nas maturidades mais longas (CALDEIRA, 2011, p. 110).

A fim de contornar o inconveniente de extrapolar taxas indefinidamente crescentes ou decrescentes, sugerimos a fixação da taxa *forward* nesse período. A técnica de se manter a taxa *forward* constante entre os vértices é conhecida como *Flat Forward*, bastante utilizada entre os praticantes de mercado no Brasil, inclusive pelo Banco Central do Brasil. Algebricamente, funciona como uma Progressão Geométrica onde a razão é a própria taxa *forward*. Segundo Varga (2009), a técnica de ajustar a curva de juros por *Flat Forward* “Fixa vértices em taxas conhecidas e busca um ajuste exato por meio da decomposição das taxas entre os vértices por dia útil, tomando taxas a termo constantes entre quaisquer dois vértices”. Assim, a parte interpolada da curva é ajustada por *Spline* Cúbico, e a parte extrapolada perpetua a taxa *forward* observada no último período interpolado, ou seja, mantemos constante a última inclinação observada na curva de juros. Vimos que a taxa *forward* é a taxa contratada hoje para ter vigência em um período futuro e que seu valor corresponde ao incremento da taxa *spot* para esse período de vigência no futuro. No regime de capitalização composto (discreto), a taxa *forward* é dada por: $1 + F_{t,t+1} = \frac{(1+S_{t+1})^{t+1}}{(1+S_t)^t}$, onde: $F_{t,t+1}$ = taxa *forward* de hoje para o período no futuro entre t e $t+1$ e S_t = taxa *spot* de hoje para um título com vencimento em t .

3.3.3 MODELO DE EQUILÍBRIO UNIFATORIAL DE VASICEK

“*Since we cannot realistically forecast the future course of an interest rate, it is natural to model it as a random variable*” (WILMOTT 2006, p. 509), em tradução livre: como não é possível determinar a trajetória futura da taxa de juros, é natural que ela seja modelada como uma variável aleatória. Este é o mote para o desenvolvimento dos modelos de equilíbrio, que tratam o comportamento da taxa instantânea de juros de curto prazo (r) como um processo estocástico e a partir de sua determinação é que se derivam as outras taxas. A taxa instantânea de juros de curto prazo é a taxa de um título zero cupom cuja maturidade tende a zero e, por esta característica, não é uma taxa diretamente observável no mercado. Segundo Hull (1998), este processo se inicia com a precificação de um título zero cupom em um mundo neutro ao risco, ou seja, onde a taxa de crescimento de r é ajustada pelo seu risco de mercado λs , que representa o excesso de retorno sobre um investimento livre de risco, por unidade de risco. Onde λ é o preço de mercado do risco associado a r , e s é volatilidade de r .

O valor presente esperado desse título, que tem valor de face \$1, será calculado com base em todas as trajetórias possíveis que r possa fazer. O valor presente de um título calculado sob estas condições define seu preço livre de arbitragem:

$$P(t, T) = \hat{E} \left[e^{-\int_t^T r(u) du} \right]$$

onde:

$P(t, T)$ é o preço em t de um título zero cupom com valor de face \$1 em T .

r é taxa instantânea de juros de curto prazo

\hat{E} representa o valor esperado em um mundo neutro ao risco.

Se fizermos $R(t, T)$ ser a taxa de juros capitalizada continuamente para o intervalo de tempo $T - t$, então $P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$, ou de forma equivalente, $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$, que fazendo a substituição nos leva a:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln \hat{E} \left[e^{-\int_t^T r(u) du} \right]$$

Isto significa que a partir do conhecimento do processo gerador da taxa instantânea de juros de curto prazo r , em um mundo neutro ao risco, é possível obter a Estrutura a Termo da Taxa de Juros $R(t, T)$ para qualquer maturidade. Em um modelo unifatorial, que envolve apenas uma fonte de incerteza ou variável de estado, o processo estocástico seguido pela taxa instantânea de juros de curto prazo r , assume a forma de uma equação diferencial estocástica:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz$$

Segundo Bolder (2001), em um modelo multifatorial, que envolve mais de uma fonte de incerteza ou variável de estado, assume-se que a taxa instantânea de juros de curto prazo r é, de fato, uma combinação linear de n variáveis de estado ou fatores (y_1, y_2, \dots, y_n), governadas por equações diferenciais estocásticas semelhantes a do modelo unifatorial. Neste caso, temos a seguinte identidade:

$$r = \sum_{i=1}^n y_i$$

O processo estocástico seguido pela taxa instantânea de juros de curto prazo r , que se desenvolve em tempo contínuo, também é conhecido como processo de difusão e assume que o desvio instantâneo m e o desvio padrão instantâneo s são dependentes de r , porém

independentes do tempo. Vários pesquisadores utilizaram este *framework* para modelar a Estrutura a Termo da Taxa de Juros, entre eles Vasicek (1977) que fez $m(r)=a(b-r)$ e $s(r)=\sigma$, e Cox, Ingersoll e Ross (1985) que fez $m(r)=a(b-r)$ e $s(r)=\sigma\sqrt{r}$. Nosso foco será no modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek que tratou a evolução da taxa instantânea de juros de curto prazo r , como um processo estocástico com reversão à média. A seguinte equação diferencial estocástica de Ornstein-Uhlenbeck representa a velocidade do movimento de r no tempo:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dW$$

Assumindo que o preço de mercado do risco é constante $\lambda(t,r) = \lambda$, a dinâmica neutra ao risco fica (Bolder 2001):

$$dr = a(b^Q - r)dt + \sigma dW^Q$$

Onde $b^Q = b - \frac{\sigma\lambda}{a}$ e a , b e σ são constantes. Neste processo, a variação da taxa instantânea de juros de curto prazo r é composta por duas parcelas: a primeira parcela é o termo determinístico da equação, conhecido como *drift*, e mostra a tendência de r convergir para b com velocidade a ; a segunda parcela é o termo estocástico da equação, conhecido como *diffusion*, e é composta pelo difusor σ e o incremento diferencial de um movimento browniano dW . O movimento browniano também é conhecido como um processo de Wiener e pode ser entendido como uma variável normalmente distribuída com média 0 e variância dt , sendo assim, dW representa a incerteza da economia contida no movimento de r . A solução explícita (aplicando o Lema de Itô) da equação diferencial estocástica de Ornstein-Uhlenbeck representa o estado de r no tempo (BRIGO et al., 2007):

$$r_{t,n} = b(1 - e^{-a(n-t)}) + r_t e^{-a(n-t)} + \sigma e^{-an} \int_t^n e^{au} dW_u$$

Podemos visualizar graficamente a evolução da taxa instantânea de juros de curto prazo r , discretizando e simulando seu processo estocástico por recorrência. Segundo Brigo et al. (2007), a versão em tempo discreto fica:

$$r_t = b(1 - e^{-a\Delta t}) + r_{t-1} e^{-a\Delta t} + \sigma z_t \sqrt{\Delta t}$$

onde Δt representa um curto espaço de tempo, e z é a variável normal padronizada ($z \sim N(0,1)$). Também se admite que a taxa de juros instantânea de curto prazo corrente ($r_{t=0}$) é conhecida e seus valores subsequentes vem por recorrência. Um resultado equivalente (bastante aproximado) pode ser obtido pelo método de discretização de Euler aplicado

diretamente na equação diferencial estocástica que, basicamente, consiste em substituir dt por Δt e dW por $z\sqrt{\Delta t}$ (SCHURMAN 2009), assim o movimento de r no tempo passa a ser escrito:

$$\Delta r_t = a(b - r_t)\Delta t + \sigma z_t \sqrt{\Delta t}$$

$$r_{t+\Delta t} - r_t = a(b - r_t)\Delta t + \sigma z_{t+\Delta t} \sqrt{\Delta t}$$

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma z_{t+\Delta t} \sqrt{\Delta t}$$

Para Δt equivalente a um período temos,

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r_t) + \sigma z_{t+1}$$

Para efeito da presente ilustração, utilizaremos os parâmetros ajustados em Chen (1996): taxa de reversão a média $a = 0,2456$; taxa média no longo prazo $b = 0,0648$; volatilidade da taxa de curto prazo $\sigma = 0,0289$; taxa de curto prazo corrente que se supõe conhecida $r_{(0)} = 0,06$. Além disso precisamos estabelecer um horizonte para simulação, $T = 5$ anos, e o intervalo de tempo discreto Δt , que representa o espaço de tempo entre duas observações consecutivas e deve ser tão pequeno quanto se queira estar próximo de um intervalo instantâneo, a fim de se melhorar a aproximação do tempo discreto com o tempo contínuo. Se fizermos este intervalo de 1,8 dias em um ano de 360 dias, temos $\Delta t = 0,005$. O GRÁFICO 6 apresenta a simulação das possíveis trajetórias que a taxa instantânea de juros de curto prazo r pode fazer:

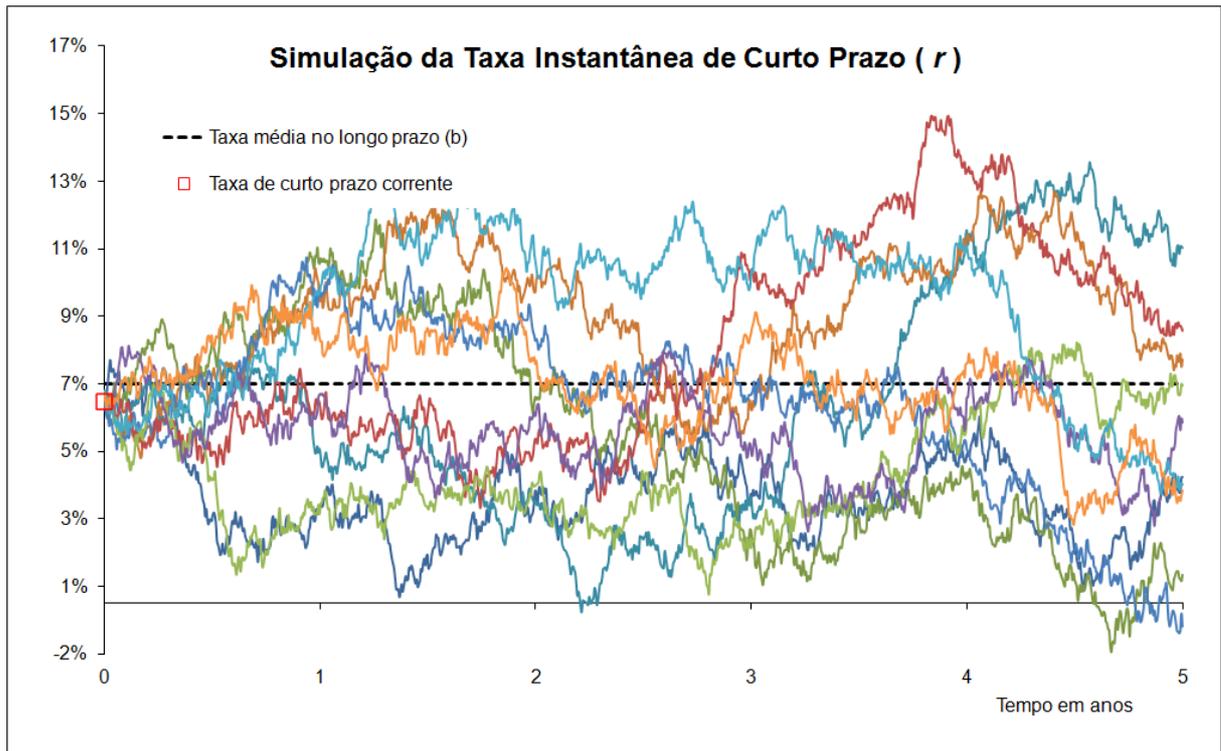


GRÁFICO 6 – Simulação da Taxa Instantânea de Curto Prazo (r)

Fonte: Do autor com os parâmetros ajustados por Chen (1996, p. 28)

Empiricamente se observa que ao longo do tempo as taxas de juros parecem convergir para um determinado nível. Este fato estilizado é conhecido como *tendência de retorno à média* e seu fundamento econômico estabelece que taxas de juros altas diminuem a demanda por crédito e desaceleram a economia. A consequência disso é a queda na taxa de juros que ao baratearem o crédito, aumenta a demanda de recursos por parte dos tomadores de empréstimos e, por consequência, as taxas de juros voltam a subir. Esta dinâmica está presente no *drift* da equação diferencial estocástica, que é o termo de conversão à média: o parâmetro b representa taxa de juros de curto prazo esperada no longo prazo (a taxa média no longo prazo) para onde r deve convergir com a velocidade imposta pelo parâmetro de reversão à média a . Assim, quando r estiver acima de b , o termo $a(b-r)$ será negativo e puxará a taxa para baixo, quando r estiver abaixo de b ocorre o contrário, o termo $a(b-r)$ será positivo e reconduzirá a taxa para cima.

Este processo de reversão à média é “dificultado” pelo *diffusion* da equação que provoca choques na taxa de juros a todo instante de tempo. A especificação do difusor, que representa a volatilidade da taxa de juros, imprime características importantes para os modelos. Como vimos, Vasicek utilizou um difusor (σ) constante e independente, fazendo com que a taxa de juros tenha uma distribuição normal. Por ter esta distribuição, existe a possibilidade do modelo gerar taxas de juros negativas, uma característica indesejável se

estivermos modelando taxa de juros nominais, porém realista se estivermos modelando taxa de juros reais. CIR anulou esta possibilidade utilizando um difusor ($\sigma\sqrt{r}$) dependente da taxa de juros, fazendo com que a oscilação aumente ou diminua junto com a taxa, evitando a geração de taxas negativas. A inclusão da componente não linear (\sqrt{r}) no difusor modifica a distribuição da taxa de juros, que deixa de ser normal e passa a ter uma distribuição assimétrica estritamente positiva pertencente à família chi-quadrado (Chen 1996, p. 29). No modelo de Vasicek a taxa instantânea de juros de curto prazo r , para cada momento no tempo, tem distribuição normal com média e variância:

$$E[r_{t,n}] = r(t)e^{-a(n-t)} + b(1 - e^{-a(n-t)})$$

$$V[r_{t,n}] = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2a(n-t)})}{2a}$$

É fácil verificar que quando n aumenta a esperança tende a b e a variância tende a $\sigma^2/2a$. Assim, chamamos r_∞ de taxa instantânea de curto prazo esperada no infinito, que têm a seguinte fórmula, distribuição de probabilidade, função densidade de probabilidade (*steady-state probability density function*), conforme Wilmott (2006), e gráfico da função densidade de probabilidade (com os mesmos parâmetros utilizados na simulação das trajetórias de r), respectivamente:

$$r_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2/a^2}$$

$$r_\infty \sim N\left(b, \frac{\sigma}{\sqrt{2a}}\right)$$

$$FDP_{r_\infty} = \sqrt{\frac{a}{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{a}{\sigma^2}(r-b)^2}$$

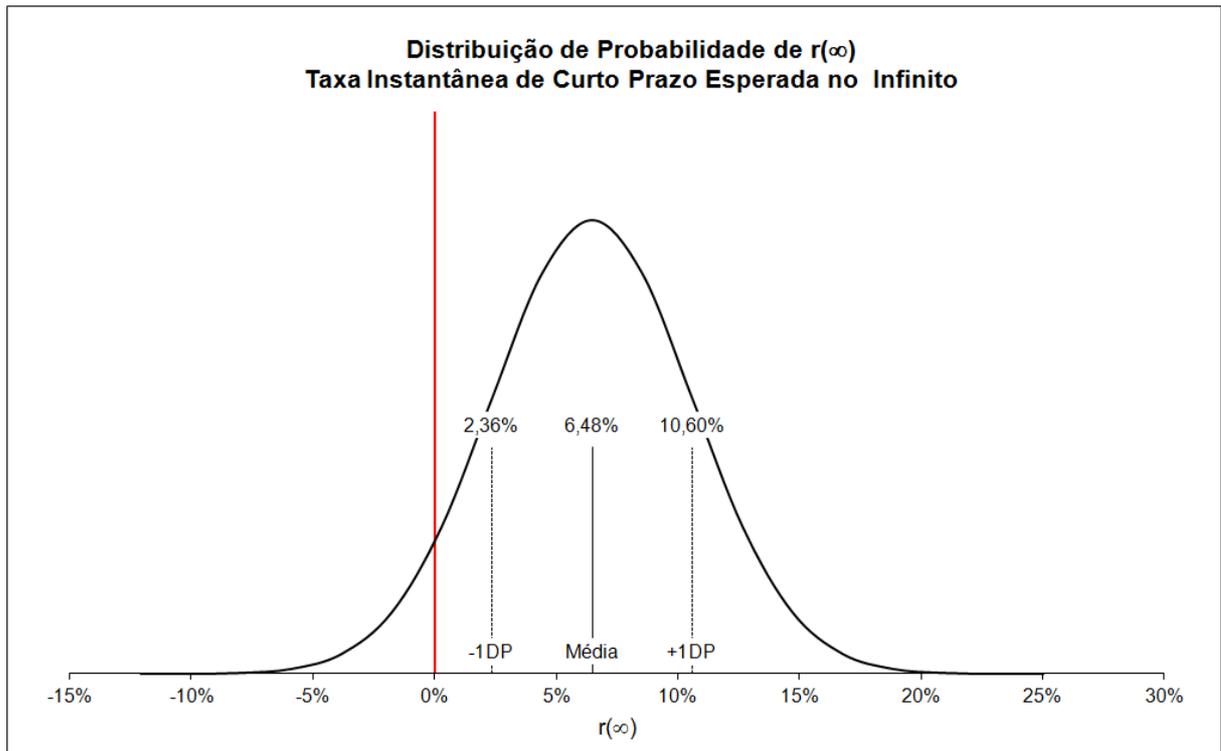


GRÁFICO 7 – Distribuição de Probabilidade de r_∞

Fonte: Do autor com os parâmetros ajustados por Chen (1996, p. 28)

Partindo da equação de precificação de um título zero cupom em um mundo neutro ao risco e com o conhecimento da lei de movimento da taxa instantânea de juros de curto prazo, Vasicek (1977) desenvolveu uma solução analítica (fechada) para o preço de um título zero cupom $P(t,T)$ e para geração da Estrutura a Termo da Taxa de Juros $R(t,T)$, que é uma função afim da variável de estado r :

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)}$$

$$R(t, T) = -\frac{A(t, T)}{T - t} + \frac{B(t, T)}{T - t}r(t)$$

onde

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

e

$$A(t, T) = (B(t, T) - T + t) \left(b - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a}$$

De acordo com esta formulação, a Estrutura a Termo da Taxa de Juros $R(t,T)$ depende de uma única variável de estado, a taxa de juros instantânea de curto prazo r , dos

parâmetros a , b e σ que governam o comportamento da variável de estado r , e do parâmetro λ que controla o preço de mercado do risco. Assim, uma vez estimados os valores dos parâmetros (a , b , σ e λ) o modelo faz a conexão entre as taxas de curto prazo e as taxas de longo prazo, o que nos permite determinar toda a Estrutura a Termo da Taxa de Juros. Como $R(t,T)$ depende linearmente de r , este passa a ser o nível da estrutura a termo no instante t e, qualquer oscilação em r provoca o deslocamento paralelo da curva de juros. A taxa de longuíssimo prazo vem quando a maturidade do título tende ao infinito: $R(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} R(t,T) = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$. A curva de juros modelada pode assumir as formas tradicionalmente observadas (VASICEK 1997): normal (inclinação positiva) quando $R(T) \leq R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^2}$, invertida (inclinação negativa) quando $R(T) \geq R(\infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2}$ e arqueada quando $R(\infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \geq T_T \geq R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^2}$.

Backus, Foresi e Telmer (1998) discretizaram a fórmula da geração da Estrutura a Termo da Taxa de Juros $R(t,T) = \frac{A(t,T)}{T-t} + \frac{B(t,T)}{T-t}r(t)$, onde $A(t,T)$ e $B(t,T)$ se apresentam na forma de um processo recursivo que se inicia com $A_0 = B_0 = 0$ e segue:

$$B_t = 1 + aB_{t-1}$$

$$A_t = A_{t-1} + B_{t-1}(1-a)b + \frac{\lambda^2 - (\lambda + \sigma B_{t-1})^2}{2}$$

A média e a variância da taxa de juros $R(t,T)$ são dadas por:

$$E[R(t,T)] = \frac{A(t,T)}{T-t} + \frac{B(t,T)}{T-t}b$$

$$V[R(t,T)] = \left(\frac{B(t,T)}{T-t}\right)^2 \frac{\sigma^2}{1-a^2}$$

A partir deste processo discretizado de geração da Estrutura a Termo da Taxa de Juros, vamos estimar os parâmetros a , b , σ e λ do modelo pelo Método dos Momentos.

O modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek possui qualidades analíticas e econômicas interessantes, como a solução fechada para geração da Estrutura a Termo da Taxa de Juros e a precificação livre de arbitragem de um título. Por outro lado, depende de um único fator para ajustar a curva de juros, permite a geração de taxa de juros negativa, a curva de juros estimada é apenas uma aproximação da curva de juros observada e existe uma dependência linear entre as taxas estimadas (BOLDER 2001). Em seu conjunto, as

propriedades que caracterizam o modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek fazem dele uma importante ferramenta para gestão de ativos de renda fixa e seus derivativos.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Este trabalho tem como objetivo geral discutir e aplicar a técnica de interpolação por *Spline* Cúbico, o modelo paramétrico de Svensson e o modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek, na construção da Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) que será utilizada para descontar o fluxo de caixa projetado (Estimativa Corrente) das obrigações decorrentes dos contratos de seguros com cobertura por sobrevivência. Como objetivo específico, deseja-se conhecer e analisar a magnitude das diferenças encontradas nos resultados do Teste de Adequação de Passivo (TAP) decorrente da utilização de diferentes modelos de ETTJ, ou seja, analisar a robustez destes resultados.

Inicialmente foi discutida a questão do Teste de Adequação de Passivo no âmbito IFRS e local. Seguimos com uma pesquisa descritiva a fim de abordar as principais forças que concorrem para formação da Estrutura a Termo da Taxa de Juros, onde também foi apresentada a técnica de interpolação por *Spline* Cúbico, o modelo paramétrico de Svensson e o modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek. Após esta apresentação, fizemos uma pesquisa quantitativa utilizando as taxas negociadas nos pregões da BM&FBOVESPA, mercados *swap* DI-IPCA e *swap* DI-IGPM, para estimação dos parâmetros e construção da ETTJ para cada um dos modelos apresentados. Segue uma primeira inspeção das curvas plotadas em gráfico. Concluimos com uma pesquisa aplicada, calculando a Estimativa Corrente para fluxos de caixa teóricos com diferentes perfis de pagamento, a fim de se analisar o efeito combinado da modelagem da taxa de juros com o perfil de pagamento no valor presente descontado do fluxo de caixa. Finalmente, apresentamos um caso prático onde analisamos o impacto dos modelos de ETTJ no cálculo do TAP para uma carteira real de seguros com cobertura por sobrevivência.

Para a execução dos testes, construímos 18 curvas de juros e utilizamos 6 fluxos de caixa. As curvas de juros foram construídas de acordo com a seguinte metodologia: cada um dos três modelos (*Spline* Cúbico, Svensson e Vasicek) foi posicionado em três datas distintas (29/06/2012, 29/12/2011 e 30/06/2011) e ajustado para dois indexadores (taxas de cupom IPCA e IGPM). Os fluxos de caixa foram divididos em dois grupos que performaram dois testes distintos: 1) Fluxo de Caixa Teórico. Construímos quatro fluxos de caixa teóricos projetados por carteiras de seguros com cobertura por sobrevivência, a fim de poder tratar os diferentes perfis de pagamentos que as carteiras seguradas podem assumir. Nestes fluxos assumimos que os compromissos são indexados pelo IPCA. O teste realizado teve por objetivo avaliar a sensibilidade da Estimativa Corrente à modelagem da ETTJ de cupom

IPCA; 2) Fluxo de Caixa Observado. Seleccionamos dois fluxos de caixa projetados por carteiras reais de seguros com cobertura por sobrevivência, oferecidos pela Seguradora que colaborou com este trabalho através do “Termo de Consentimento” do APÊNDICE A. Nestes fluxos os compromissos são indexados pelo IGPM. O teste realizado teve por objetivo avaliar a sensibilidade do TAP à modelagem da ETTJ de cupom IGPM.

4.1 BASE DE DADOS PARA CONSTRUÇÃO DA ETTJ

Em nosso estudo, estamos construindo uma ETTJ com a finalidade específica de calcular Estimativa Corrente de fluxos de caixa futuros de contratos de seguro, no âmbito do IFRS 4. Definimos Estimativa Corrente como o valor presente esperado dos fluxos de caixa que decorram do cumprimento dos contratos de seguro descontados pela Estrutura a Termo da Taxa de Juros livre de risco. Dessa forma, a ETTJ que vamos construir será utilizada para descontar o fluxo de caixa projetado dos compromissos futuros oriundos de uma carteira de seguros com cobertura para sobrevivência. Uma das garantias previstas nestes contratos é a de que os benefícios a serem pagos, e em alguns produtos também o fundo acumulado pelas contribuições, serão corrigidos monetariamente por algum índice oficial de preços. Fluxos de caixa com estas características permitem dois tratamentos na sua geração: os valores projetados podem ser atualizados pelo indexador de preço (valor corrente) e gerar um fluxo indexado (fluxo nominal), ou os valores projetados podem não ser atualizados pelo indexador de preço (valor constante) e gerar um fluxo desindexado (fluxo real). A decisão sobre a geração de um fluxo indexado ou desindexado tem implicação direta sobre qual ETTJ será usada na Estimativa Corrente: um fluxo indexado deverá ser descontado por uma taxa de juros nominal (que embute inflação), ao passo que um fluxo desindexado deverá ser descontado por uma taxa de juros real (que não embute inflação).

Em nosso estudo todos os fluxos de caixa utilizados para o cálculo das estimativas correntes serão desindexados evitando, dessa forma, a necessidade de se estimar o indexador de preço para corrigir os valores projetados. Assim, a base de dados utilizada para construção da ETTJ deve ter origem no mercado de títulos de renda fixa pós-fixados com correção monetária atrelada a algum índice de preço, que são cotados pela taxa de juros real mais a variação do indexador. Procedendo dessa maneira mantemos a consistência no cálculo da Estimativa Corrente, quando tanto o fluxo de caixa quanto a Estrutura a Termo da Taxa de Juros estão na mesma base de valores reais. Esta estratégia em nada compromete a qualidade da Estimativa Corrente visto que no caso da opção pelo fluxo de caixa indexado, a taxa de

juros utilizada no desconto deverá embutir a mesma projeção de indexador, fazendo com que a Estimativa Corrente deste fluxo resulte no mesmo valor da Estimativa Corrente desindexada.

A base de dados utilizada para construção de uma estrutura a termo para taxas de juros deve ter origem na cotação de mercado de títulos de renda fixa zero cupom isentos de risco de crédito e liquidez. O emissor de títulos com estas características é o próprio governo, já que em última instância pode também emitir moeda para honrar seus compromissos, mas devido a pouca liquidez para maturidades mais longas destes títulos, utiliza-se como *proxy* as taxas de juros embutidas nos contratos de derivativos negociados na BM&FBOVESPA.

Devido ao fato dos contratos de seguros garantirem a atualização monetária dos valores e nossa opção pela geração dos fluxos de caixa desindexados, utilizaremos as taxas cotadas no mercado de contratos *swap* DI-IPCA e DI-IGPM negociados na BM&FBOVESPA, que apresentam taxas de juros reais para estes indexadores e, portanto, são indicadas para precificação de fluxos que oferecem estas garantias. Uma característica importante deste mercado é que seus contratos têm vencimento padronizado fazendo com que a maturidade observada varie muito pouco. Isto permite a construção de uma série histórica padronizada que é muito útil na modelagem da estrutura a termo para taxas de juros. Outras características desses contratos são: taxas de juros que representam o diferencial entre o DI acumulado até o vencimento do contrato e a variação do indexador para o mesmo período; negociado em taxas de juros com até três casas decimais expressas ao ano de 252 dias úteis; negociação em taxa que posteriormente é transformada em natureza inversa em PU através do valor presente de 100.000 descontado pela taxa negociada.

Para a modelagem estática (*cross-section*) da curva de juros utilizamos as cotações dos contratos DI-IPCA e DI-IGPM dos dias 29/06/2012, 29/12/2011 e 30/06/2011, para as maturidades de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180 e 186 meses. Para a modelagem dinâmica, que incorpora a dinâmica intertemporal das curvas de juros, utilizamos as cotações semanais (quarta-feira) dos contratos DI-IPCA e DI-IGPM no período compreendido entre 21/09/2005 e 27/06/2012, para as maturidades selecionadas de 1, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses, totalizando 4.602 pontos observados (13 maturidades x 354 dias). Seguem curvas das taxas de juros observadas (GRÁFICO 8, GRÁFICO 9 e GRÁFICO 10) e descrição estatística (TABELA 2 e TABELA3) da base de dados utilizada:

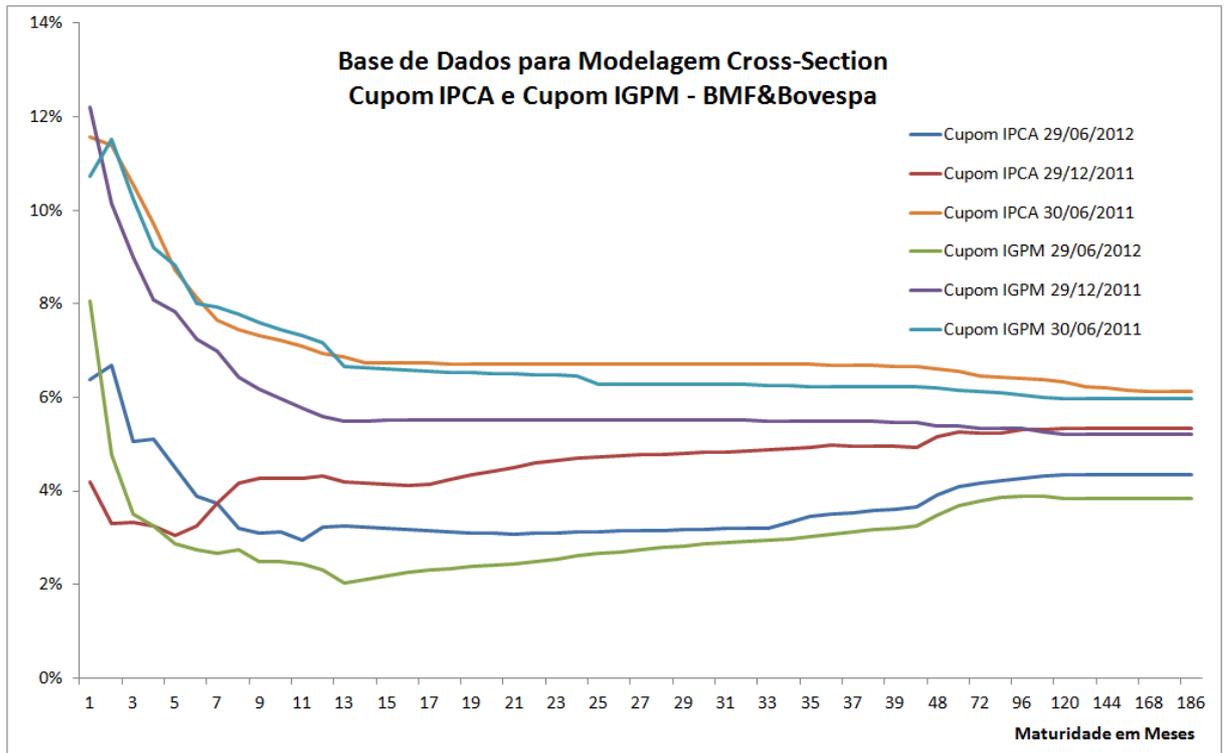


GRÁFICO 8 – Visualização da Base de Dados para Modelagem *Cross-Section*

Fonte: Do autor com base nas cotações das taxas de *swap* DI-IPCA e DI-IGPM da BM&FBOVESPA

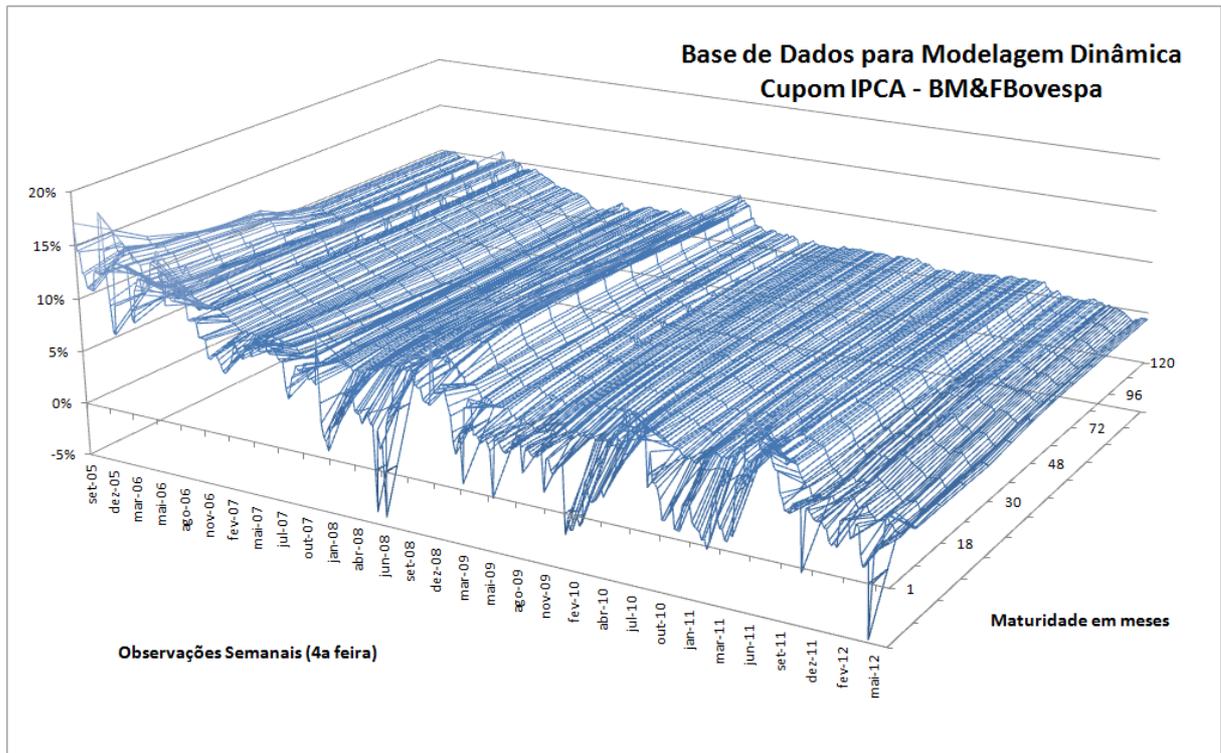


GRÁFICO 9 – Visualização da Base de Dados Cupom IPCA para Modelagem Dinâmica

Fonte: Do autor com base nas cotações das taxas de *swap* DI-IPCA negociados na BM&FBOVESPA

TABELA 2 - Base de Dados para Modelagem Dinâmica - Cupom IPCA - Estatística Descritiva (% aa)

Maturidade em meses	Média	Mediana	Mínimo	Máximo	D.Padrão	Simetria	Curtose	Autocorrelação de ordem 1
1	6,57%	6,00%	-4,75%	18,54%	4,05%	0,2394	-0,1668	0,8892
12	6,94%	6,58%	2,11%	15,21%	2,38%	0,7920	0,6737	0,9905
18	7,07%	6,75%	2,53%	13,24%	2,20%	0,4944	0,1797	0,9940
24	7,18%	6,76%	2,66%	12,43%	2,07%	0,4088	0,0457	0,9934
30	7,22%	6,74%	2,80%	12,32%	1,95%	0,3780	-0,0126	0,9925
36	7,25%	6,71%	3,01%	12,25%	1,87%	0,3846	-0,0437	0,9906
48	7,21%	6,72%	3,37%	11,04%	1,67%	0,2794	-0,3991	0,9901
60	7,15%	6,74%	3,66%	10,93%	1,55%	0,2552	-0,4617	0,9866
72	7,12%	6,75%	3,73%	10,93%	1,53%	0,3190	-0,4401	0,9866
84	7,10%	6,71%	3,79%	10,93%	1,50%	0,3915	-0,3729	0,9859
96	7,08%	6,69%	3,84%	10,93%	1,48%	0,4541	-0,3399	0,9857
108	7,06%	6,64%	3,84%	10,93%	1,46%	0,5060	-0,3041	0,9856
120	7,03%	6,61%	3,83%	10,93%	1,45%	0,5655	-0,2759	0,9852

Fonte: Do autor com base nas cotações das taxas de *swap* DI-IPCA negociados na BM&FBOVESPA

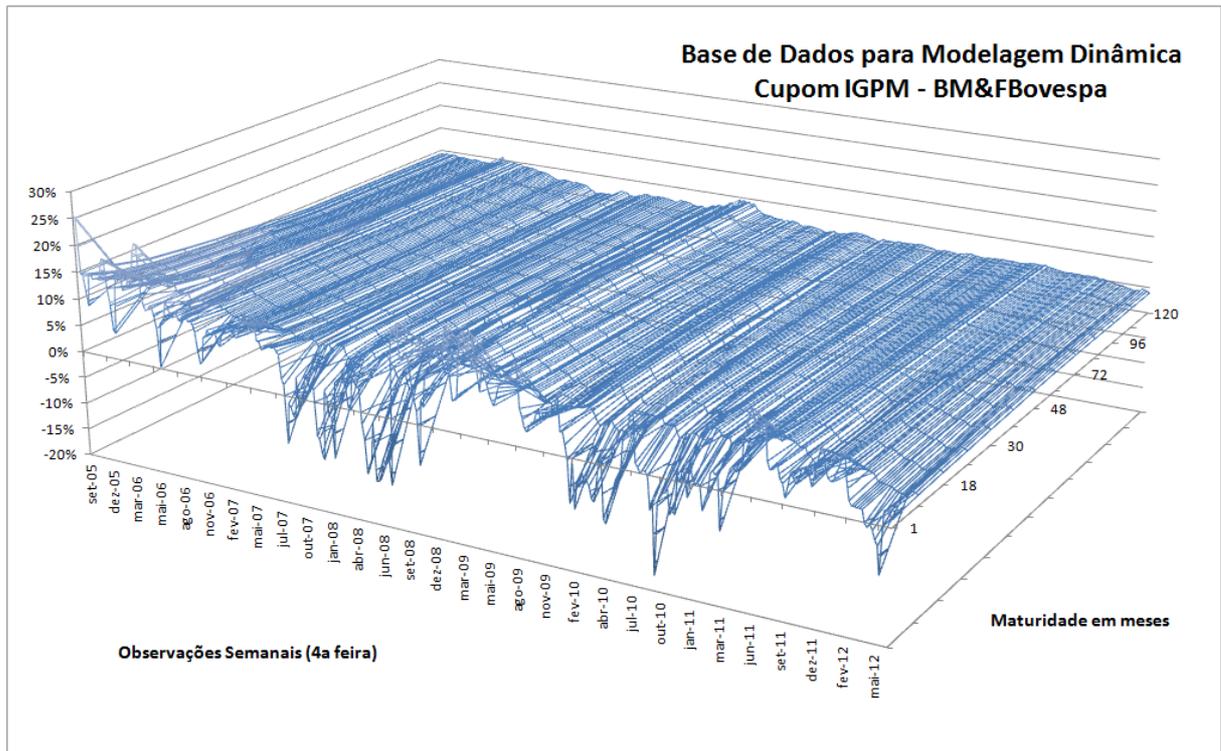


GRÁFICO 10 – Visualização da Base de Dados Cupom IGPM para Modelagem Dinâmica

Fonte: Do autor com base nas cotações das taxas de *swap* DI-IGPM negociados na BM&FBovespa

TABELA 3 - Base de Dados para Modelagem Dinâmica - Cupom IGPM - Estatística Descritiva (% aa)

Maturidade em meses	Média	Mediana	Mínimo	Máximo	D.Padrão	Simetria	Curtose	Autocorrelação de ordem 1
1	5,61%	6,14%	-17,23%	25,50%	7,34%	-0,3051	-0,0883	0,8696
12	6,64%	6,32%	1,34%	13,77%	2,85%	0,4220	-0,4867	0,9776
18	6,78%	6,49%	1,96%	12,23%	2,33%	0,3893	-0,5386	0,9826
24	6,86%	6,62%	2,21%	11,44%	2,10%	0,3197	-0,5157	0,9837
30	6,89%	6,63%	2,66%	10,83%	1,91%	0,3057	-0,5561	0,9853
36	6,92%	6,64%	2,95%	10,74%	1,80%	0,2903	-0,5695	0,9854
48	6,90%	6,61%	3,28%	10,54%	1,63%	0,2554	-0,6011	0,9861
60	6,87%	6,57%	3,48%	10,59%	1,53%	0,2759	-0,6366	0,9853
72	6,86%	6,55%	3,58%	10,59%	1,49%	0,3369	-0,6565	0,9861
84	6,86%	6,54%	3,68%	10,59%	1,46%	0,3909	-0,6455	0,9856
96	6,85%	6,53%	3,76%	10,59%	1,45%	0,4278	-0,6209	0,9848
108	6,84%	6,50%	3,86%	10,59%	1,44%	0,4593	-0,6091	0,9853
120	6,82%	6,49%	3,90%	10,59%	1,43%	0,4840	-0,5919	0,9857

Fonte: Do autor com base nas cotações das taxas de *swap* DI-IGPM negociados na BM&FBovespa

5 RESULTADOS

5.1 ESTRUTURA A TERMO DA TAXAS DE JUROS (ETTJ) AJUSTADA

De acordo com a metodologia da pesquisa, iniciamos a apresentação dos resultados quantitativos com as curvas de juros ajustadas segundo os modelos discutidos: o modelo paramétrico de Svensson (modelo1), a técnica de interpolação por *Spline* Cúbico (modelo 2) e o modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek (modelo 3). As curvas foram ajustadas em três datas de referência: 29/06/2012 (data 1), 29/12/2011 (data 2) e 30/06/2011 (data 3), para as taxas de cupom IPCA e IGPM. Dessa forma, foram construídas 18 curvas de juros que serão utilizadas no cálculo das estimativas correntes. Para facilitar sua referência ao longo do trabalho vamos codifica-las conforme QUADRO 1:

Cupom	Modelo	Data de Referência		
		29/06/2012 (D1)	29/12/2011 (D2)	30/06/2011 (D3)
IPCA	Svensson (M1)	CIPCA-D1-M1	CIPCA-D2-M1	CIPCA-D3-M1
	CSpline (M2)	CIPCA-D1-M2	CIPCA-D2-M2	CIPCA-D3-M2
	Vasicek (M3)	CIPCA-D1-M3	CIPCA-D2-M3	CIPCA-D3-M3
IGPM	Svensson (M1)	CIGPM-D1-M1	CIGPM-D2-M1	CIGPM-D3-M1
	CSpline (M2)	CIGPM-D1-M2	CIGPM-D2-M2	CIGPM-D3-M2
	Vasicek (M3)	CIGPM-D1-M3	CIGPM-D2-M3	CIGPM-D3-M3

QUADRO 1 - Codificação das ETTJ's Ajustadas

Assim, quando nos referirmos ao código CIGPM-D3-M2, significa que estamos utilizando uma ETTJ de Cupom IGPM (CIGPM), calculada na data de referência 30/06/2011 (D3) e ajustada por *Spline* Cúbico (M2).

5.1.1 MODELO PARAMÉTRICO DE SVENSSON

Como nosso objetivo é obter uma estrutura a termo para taxas de juros, a variável modelada será a própria taxa de juros e não o preço do título. As taxas geradas pelo modelo estão no regime de capitalização contínua e foram convertidas para o regime de capitalização composta (discreto) de acordo com a seguinte fórmula: $taxa\ discreta = e^{taxa\ continua} - 1$.

Replicaremos a solução adotada por Diebold e Li (2006) para estimação dos parâmetros do modelo de Nelson-Siegel, que “linearizou” a função taxa *spot* $s(\tau)$ pela

fixação do parâmetro não linear λ , e estimou os parâmetros lineares β_1 , β_2 e β_3 por mínimos quadrados ordinários. Nossa escolha por esta solução se deve à sua simplicidade e aos bons resultados que ela conduz. Em nosso caso, fixaremos os parâmetros não lineares λ_1 e λ_2 da função taxa *spot* $s(\tau)$ de Svensson e, da mesma forma, estimaremos os parâmetros lineares β_1 , β_2 , β_3 e β_4 por mínimos quadrados ordinários. A modelagem proposta é classificada como *cross-section*, pois utiliza a cotação da taxa de juros observada em apenas um dia para estimar os parâmetros do modelo.

Os parâmetros de decaimento, λ_1 e λ_2 , escolhidos serão aqueles que fizerem o máximo dos *loadings* dos parâmetros responsáveis pela curvatura, os fatores de médio prazo β_3 e β_4 , coincidir com o máximo da curvatura observada, da seguinte forma: 1) Fazemos uma inspeção na curva de juros observada e identificamos as maturidades inteiras (τ_1 e τ_2) que delimitam o máximo de sua curvatura. 2) O parâmetro de decaimento λ_1 escolhido será aquele que maximizar o *loading* do primeiro parâmetro de médio prazo β_3 , $\left[\frac{1-e^{-\lambda_1,t\tau}}{\lambda_1,t\tau} - e^{-\lambda_1,t\tau} \right]$ para a maturidade τ_1 que se ajusta ao início da curvatura observada. 3) O parâmetro de decaimento λ_2 escolhido será aquele que maximizar o *loading* do segundo parâmetro de médio prazo β_4 , $\left[\frac{1-e^{-\lambda_2,t\tau}}{\lambda_2,t\tau} - e^{-\lambda_2,t\tau} \right]$ para a maturidade τ_2 que se ajusta ao final da curvatura observada.

Com λ_1 e λ_2 prefixados, calculamos os três *loadings* da função: o *loading* associado à inclinação β_2 : $\left[\frac{1-e^{-\lambda_1,t\tau}}{\lambda_1,t\tau} \right]$, o *loading* associado à primeira curvatura β_3 : $\left[\frac{1-e^{-\lambda_1,t\tau}}{\lambda_1,t\tau} - e^{-\lambda_1,t\tau} \right]$ e o *loading* associado à segunda curvatura β_4 : $\left[\frac{1-e^{-\lambda_2,t\tau}}{\lambda_2,t\tau} - e^{-\lambda_2,t\tau} \right]$, para cada uma das maturidades observadas de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180 e 186 meses. Os *loadings* calculados dessa forma serão as variáveis independentes (regressores) e as taxas observadas em cada uma das maturidades irão compor a variável dependente (resposta) da regressão linear múltipla que, ao ser resolvida por mínimos quadrados ordinários, irá estimar os fatores latentes β_1 , β_2 , β_3 e β_4 , onde β_1 será modelado como o intercepto da equação da reta.

O coeficiente de determinação ajustado r^2 , uma proporção que indica a capacidade de explicação da reta ajustada pelo método dos mínimos quadrados, também será usado para medir a qualidade da fixação dos parâmetros λ_1 e λ_2 prefixados que, em um processo de tentativa e erro, deverão contribuir para geração de r^2 mais eficiente. Cada ciclo deste

processo se inicia com a seleção de um par de maturidades inteiras (τ_1 e τ_2). Segue com a maximização dos *loadings* dos parâmetros de médio prazo (β_3 e β_4), que definem o par (λ_1 e λ_2), e se fecha com o ajuste da reta de regressão que terá seu coeficiente de determinação ajustado (r^2) avaliado. Para este exercício consideramos que um r^2 é adequado quando ele for maior que 93%. Isto significa que, no mínimo, 93% da variabilidade da taxa de juros é explicada pela variabilidade dos *loadings* associados aos parâmetros lineares da função (β_1 , β_2 , β_3 e β_4). Dessa forma, os ciclos deste processo se repetem até que seja atingido o coeficiente mínimo de 93%, momento em que o processo iterativo se encerra e os parâmetros de decaimento (λ_1 e λ_2) são definitivamente arbitrados.

Para serem modeladas, as taxas observadas que estão em regime de capitalização composta (discreto), foram convertidas para o período de capitalização em tempo contínuo pela fórmula: *taxa contínua* = $\ln(1 + \text{taxa discreta})$. A TABELA 4 apresenta os resultados do ajuste para o modelo paramétrico de Svensson, que tem a seguinte forma funcional:

$$s_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_{1,t}\tau}}{\lambda_{1,t}\tau} \right] + \beta_{3,t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_{1,t}\tau}}{\lambda_{1,t}\tau} - e^{-\lambda_{1,t}\tau} \right] + \beta_{4,t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_{2,t}\tau}}{\lambda_{2,t}\tau} - e^{-\lambda_{2,t}\tau} \right]$$

TABELA 4 - Parâmetros estimados para o modelo paramétrico de Svensson

Parâmetros	Data Ref. 29/06/2012		Data Ref. 29/12/2011		Data Ref. 30/06/2011	
	IPCA	IGPM	IPCA	IGPM	IPCA	IGPM
β_1	0,04497	0,04151	0,05445	0,05124	0,06078	0,05717
β_2	0,02693	0,05487	0,02600	0,08624	0,07244	-0,14809
β_3	0,03650	-0,11131	-0,11412	-0,06255	-0,03863	0,38065
β_4	-0,09874	-0,02930	-0,01706	-0,00224	-0,00051	-0,00144
λ_1	0,35866	0,35866	0,89664	0,35866	0,35866	1,79328
λ_2	0,17939	0,09963	0,08966	0,11955	0,11955	0,17939
Maturidade em meses de λ_1	5	5	2	5	5	1
Maturidade em meses de λ_2	10	18	20	15	15	10
r^2 (ajustado)	0,94513	0,93596	0,93638	0,99045	0,96617	0,99247

5.1.2 TÉCNICA DE INTERPOLAÇÃO POR *SPLINE* CÚBICO

A solução do sistema de equações que nos leva ao conjunto de polinômios interpolantes *Spline* Cúbico, pode ser obtida através de algoritmos construídos para este fim, e que são facilmente encontrados na literatura técnica sobre interpolação. Sugerimos Varga (2000) que apresenta um algoritmo de fácil implementação em *Visual Basic* e que pode ser transformado em uma função residente em planilha *Excel*.

Conforme descrito na seção onde apresentamos a metodologia, a parte interpolada da curva é ajustada por *Spline* Cúbico, e a parte extrapolada perpetua a taxa *forward* observada no último período interpolado, ou seja, mantemos constante a última inclinação observada na curva de juros. Procedemos dessa forma para evitar a extrapolação de taxas indefinidamente crescentes ou decrescentes, que podem ocorrer quando se utiliza a técnica de *Spline* Cúbico nesta parte da curva. Vimos que a taxa *forward* é a taxa contratada hoje para ter vigência em um período futuro, e que seu valor corresponde ao incremento da taxa *spot* para esse período de vigência no futuro. No regime de capitalização composto (discreto), a taxa *forward* é dada por: $1 + F_{t,t+1} = \frac{(1+S_{t+1})^{t+1}}{(1+S_t)^t}$, onde: $F_{t,t+1}$ = taxa *forward* de hoje para o período no futuro entre t e $t+1$ e S_t = taxa *spot* de hoje para um título com vencimento em t . A modelagem proposta é classificada como *cross-section*, pois utiliza a cotação da taxa de juros observada em apenas um dia para estimar os parâmetros do modelo.

O QUADRO 2 apresenta as taxas *forward* que foram fixadas para extrapolação de cada uma das seis curvas ajustadas por esta metodologia:

Data de Referência	Taxa de Juros	Últimas maturidades observadas			Flat Forward
		14 anos	15 anos	15,5 anos	
29/06/2012	Cupom IPCA	4,35%	4,35%	4,35%	4,35%
	Cupom IGPM	3,83%	3,83%	3,83%	3,83%
29/12/2011	Cupom IPCA	5,33%	5,33%	5,33%	5,33%
	Cupom IGPM	5,22%	5,22%	5,22%	5,22%
30/06/2011	Cupom IPCA	6,13%	6,13%	6,13%	6,13%
	Cupom IGPM	5,98%	5,98%	5,98%	5,98%

QUADRO 2 - Taxas para as últimas maturidades da curva de juros observada

5.1.3 MODELO DE EQUILÍBRIO UNIFATORIAL DE VASICEK

Como nosso objetivo é obter uma estrutura a termo para taxas de juros, a variável modelada será a própria taxa de juros e não o preço do título. As taxas geradas pelo modelo estão no regime de capitalização contínuo com período de capitalização mensal (% a.m.) e foram convertidas para o regime de capitalização composto (discreto) com período de capitalização anual (% a.a.) de acordo com a seguinte fórmula: $taxa\ discreta = e^{(12 \times taxa\ cont\u00ednua)} - 1$.

Por sua simplicidade e os bons resultados apresentados para grandes amostras, utilizaremos o Método dos Momentos para estimação dos parâmetros do modelo. Esta técnica está fundamentada no fato de que os momentos simples da amostra são estimadores centrados dos momentos simples da população e consiste, basicamente, em se igualar os resultados dos momentos da amostra com as respectivas equações dos momentos da população, a solução do sistema nos dá os valores dos parâmetros. Assim, vamos ajustar os parâmetros das equações geradoras da média e da variância (primeiro e segundo momento da população, respectivamente) das taxas da estrutura a termo de forma e minimizar as diferenças quadráticas encontradas no confronto com a média e a variância calculada a partir das taxas observadas (amostra). Este confronto se dá para cada uma das 13 maturidades selecionadas de 1, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses, sendo que cada maturidade é composta por uma série temporal de 354 observações semanais (quartas-feiras) compreendidas entre 21/09/2005 e 27/06/2012, totalizando 4.602 pontos observados. A técnica proposta permite a modelagem dinâmica da curva de juros ao capturar a dependência intertemporal que possa existir na série observada.

Para seguirmos com a modelagem será necessário escolher uma *proxy* para taxa instantânea de juros de curto prazo r , pois não se oferecem títulos com vencimento tão curto para que se possa conhecer sua taxa. De acordo com a metodologia da pesquisa, a base de dados utilizada para ajustar os parâmetros dos modelos são as taxas de juros cotadas no mercado de contratos *swap* DI-IPCA e DI-IGPM negociados na BM&FBOVESPA. Este mercado oferece contratos com vencimentos padronizados e o mais curto deles é negociado para um mês. Uma característica importante desta maturidade é a volatilidade de suas taxas (veja GRÁFICO 9 e GRÁFICO 10). Poderíamos evitar este inconveniente mudando para uma região mais estável do gráfico como a maturidade de um ano, por exemplo, mas por entender que a taxa negociada para vencimento de um mês é aquela que, conceitualmente, mais se aproxima da taxa instantânea de juros de curto prazo r , orientamos nossa escolha da *proxy* à

seu favor. Fizemos um estudo preliminar com a *proxy* de um ano e seus resultados não indicaram alteração das conclusões a respeito do modelo.

A minimização dos erros quadráticos é feita a partir de uma condição inicial, para o conjunto de parâmetros, que será submetida a um processo iterativo até que se encontre o ponto mínimo da função erro. A cada iteração, a direção da pesquisa será orientada por um algoritmo quasi-Newton. A escolha da condição inicial dos parâmetros é de extrema importância para o resultado final desta busca, pois sendo uma otimização não linear pode encontrar um mínimo local, quando o desejado é o mínimo global. Neste contexto, a escolha adequada dos valores de partida já posiciona o algoritmo de busca na vizinhança do ponto mínimo que satisfaz as condições econométricas do modelo. De acordo com Backus, Foresi e Telmer (1998), adotamos as seguintes premissas para geração dos parâmetros iniciais do modelo:

O parâmetro b , a taxa média de curto prazo no longo prazo (taxa de equilíbrio), será inicialmente fixado pela taxa média da série temporal das taxas de curto prazo para maturidade de um mês (nossa *proxi* para taxa de curto prazo r). O parâmetro a , a velocidade de reversão à média, será inicialmente fixado como sendo a autocorrelação de ordem 1 da série temporal das taxas de curto prazo para maturidade de um mês. O parâmetro σ , a volatilidade, sairá da fórmula incondicional da variância $\sigma^2 / (1 - a^2)$ quando igualada à variância da série temporal das taxas de curto prazo para maturidade de um mês. Na TABELA 2 e TABELA 3 é possível verificar a média, desvio padrão e autocorrelação de ordem 1 das taxas, em regime de capitalização composta (discreta), para todas as maturidades observadas. O parâmetro λ , o preço do risco de mercado, por controlar o prêmio de risco para se investir em títulos de longo prazo (governa a inclinação média da curva de juros) terá seu valor fixado quando fizer a média estimada pelo modelo se igualar à média observada para as maturidades mais longas.

As equações da média $E[R(t, T)] = \frac{A(t, T)}{T-t} + \frac{B(t, T)}{T-t} b$, e da variância $V[R(t, T)] = \left(\frac{B(t, T)}{T-t}\right)^2 \frac{\sigma^2}{1-a^2}$, que serão utilizadas na estimativa dos parâmetros do modelo da taxa de juros $R(t, T) = \frac{A(t, T)}{T-t} + \frac{B(t, T)}{T-t} r(t)$, tem início no processo recursivo com $A_0 = B_0 = 0$ e seguem com: $B_t = 1 + aB_{t-1}$ e $A_t = A_{t-1} + B_{t-1}(1 - a)b + \frac{\lambda^2 - (\lambda + \sigma B_{t-1})^2}{2}$. O GRÁFICO 11 e o GRÁFICO 12 mostram o perfil deste processo recursivo ao longo das maturidades:

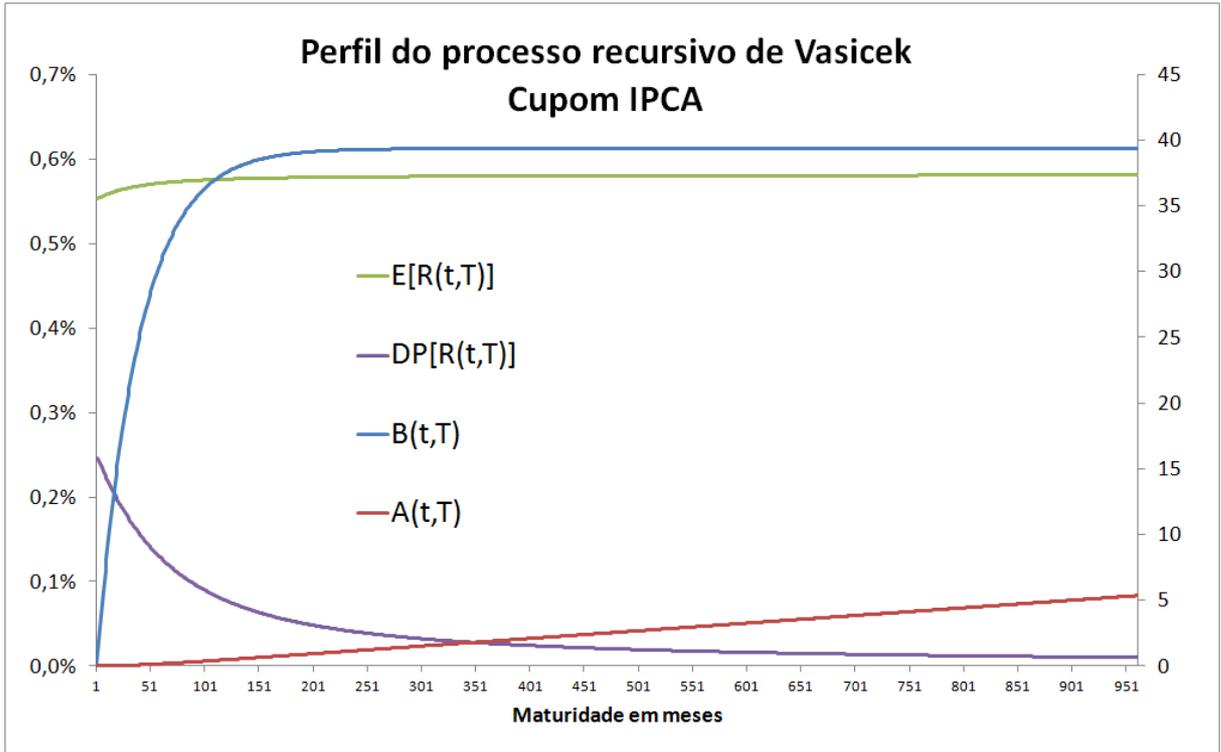


GRÁFICO 11 – Perfil do processo recursivo de Vasicek - Cupom IPCA

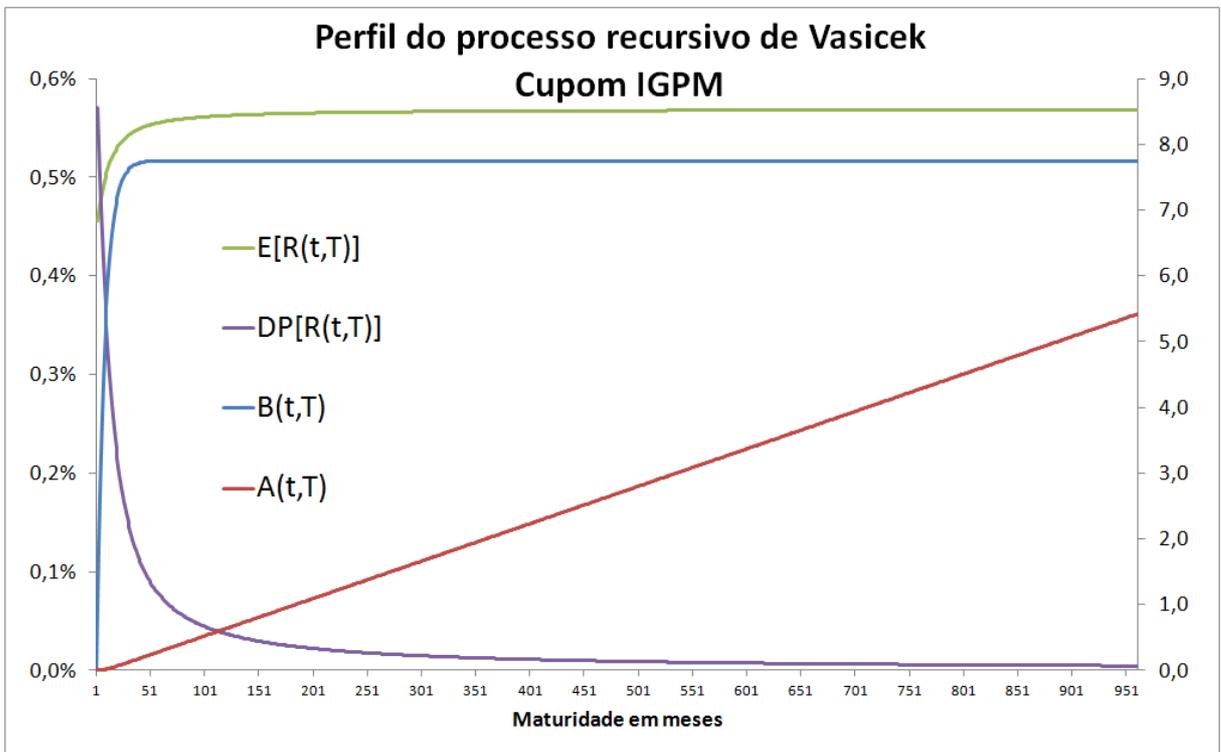


GRÁFICO 12 – Perfil do processo recursivo de Vasicek - Cupom IGPM

A função erro quadrático a ser minimizada é expressa por:

$$\text{Min}_{a,b,\sigma,\lambda} \left[\sum_{t=0}^T (E[R(t,T)] - E[\text{Observado}_T])^2 + \dots + (DP[R(t,T)] - DP[\text{Observado}_T])^2 \right]$$

onde T assume os seguintes valores: 1, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses. A TABELA 5 mostra as taxas de juros correntes (de partida) de curto prazo (maturidade de um mês) $r_{(0)}$, utilizadas na geração da Estrutura a Termo da Taxa de Juros $R(t,T)$:

TABELA 5 - Taxa de curto prazo (maturidade de um mês) corrente (taxa de partida)

Frequência	Taxa de Juros	29/06/2012	29/12/2011	30/06/2011
Capitalização Composta % ao ano	Cupom IPCA	6,39%	4,20%	11,57%
	Cupom IGPM	8,06%	12,21%	10,73%
Capitalização Contínua % ao mês	Cupom IPCA	0,5162%	0,3428%	0,9124%
	Cupom IGPM	0,6460%	0,9600%	0,8494%

Para serem modeladas, as taxas observadas que estão em regime de capitalização composta (discreto) e período de capitalização anual, foram convertidas para o período de capitalização mensal em tempo contínuo pela fórmula: $\text{taxa contínua} = \ln(1 + \text{taxa discreta}) / 12$. Assim, os parâmetros foram fixados nestas bases e apresentaram os valores da TABELA 6:

TABELA 6 - Parâmetros estimados para o modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek

Taxa de Juros	a	b	σ	λ
Cupom IPCA	0,97458	0,00553	0,00055	-0,02384
Cupom IGPM	0,87099	0,00456	0,00280	-0,06290

5.1.4 CURVAS AJUSTADAS

A seguir apresentamos o conjunto de curvas ajustadas. O primeiro bloco, composto por seis gráficos, permite a visualiza o do ajuste da curva estimada em rela o   curva observada. Esta compara o foi feita para os vencimentos dos contratos oferecidos pela BM&FBOVESPA no mercado *swap* DI x IPCA e DI x IGPM que estão limitados a 186 meses, ou seja, observaremos a qualidade da interpola o proporcionada pelos modelos para as maturidades no intervalo de 1 a 186 meses. O segundo bloco, também composto por seis gráficos, permite a visualiza o das curvas ajustadas que efetivamente serão utilizadas no

cálculo das estimativas correntes, sendo assim, além da parte interpolada também é possível observar o comportamento dos modelos na parte extrapolada da curva (taxas para os vencimentos superiores a 186 meses). Como os fluxos de caixa a serem descontados são de longuíssimos prazos, as taxas foram estimadas para maturidades anuais, dentro do intervalo de 1 a 80 anos.

Segue bloco de seis gráficos (GRÁFICO 13 ao GRÁFICO 18) com a comparação das curvas de juros observadas e estimadas pelos modelos, dentro do período interpolado de 186 meses:

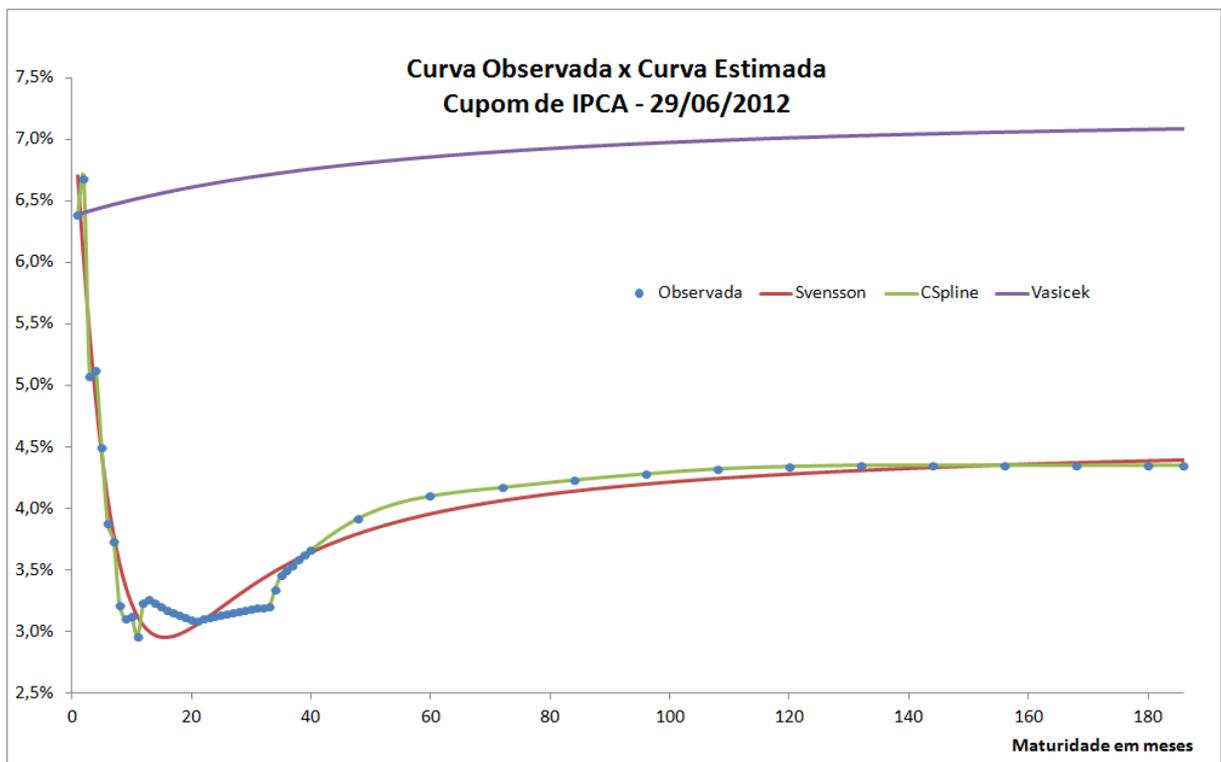


GRÁFICO 13 – Comparação das curvas estimadas e observada - Cupom IPCA - 29/06/2012

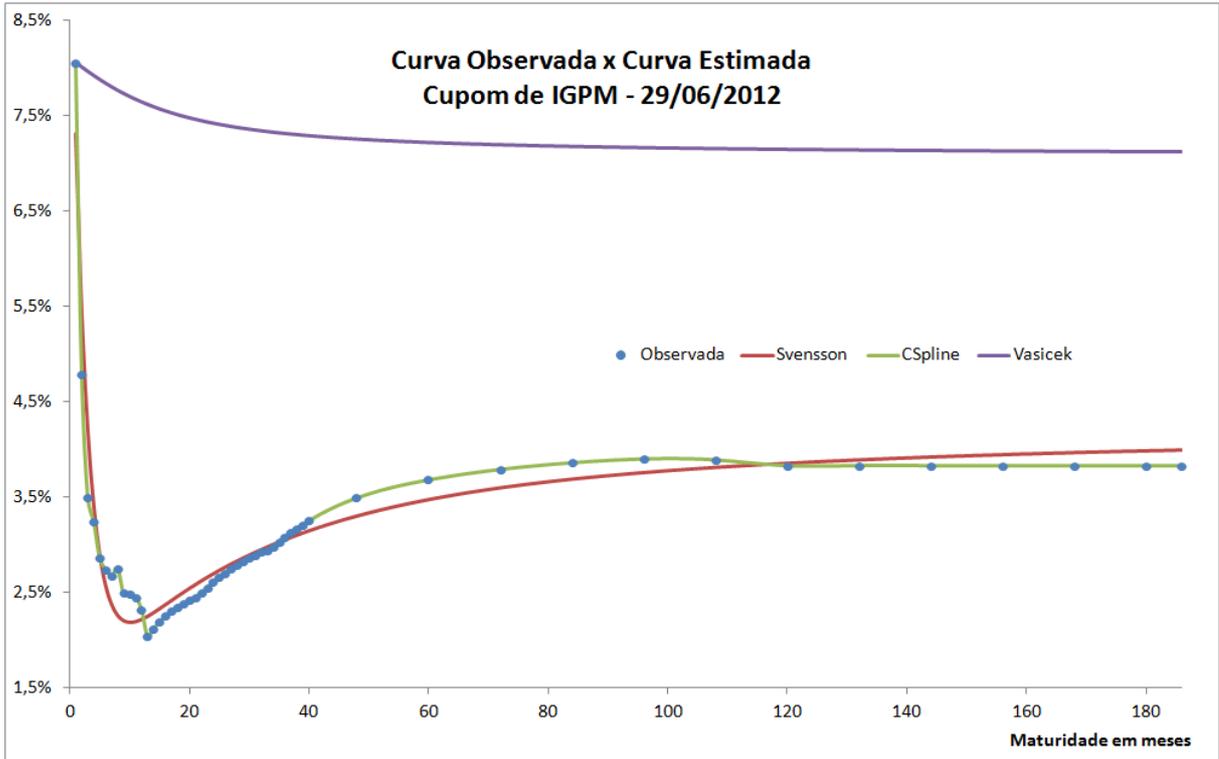


GRÁFICO 14 – Comparação das curvas estimadas e observada - Cupom IGPM - 29/06/2012

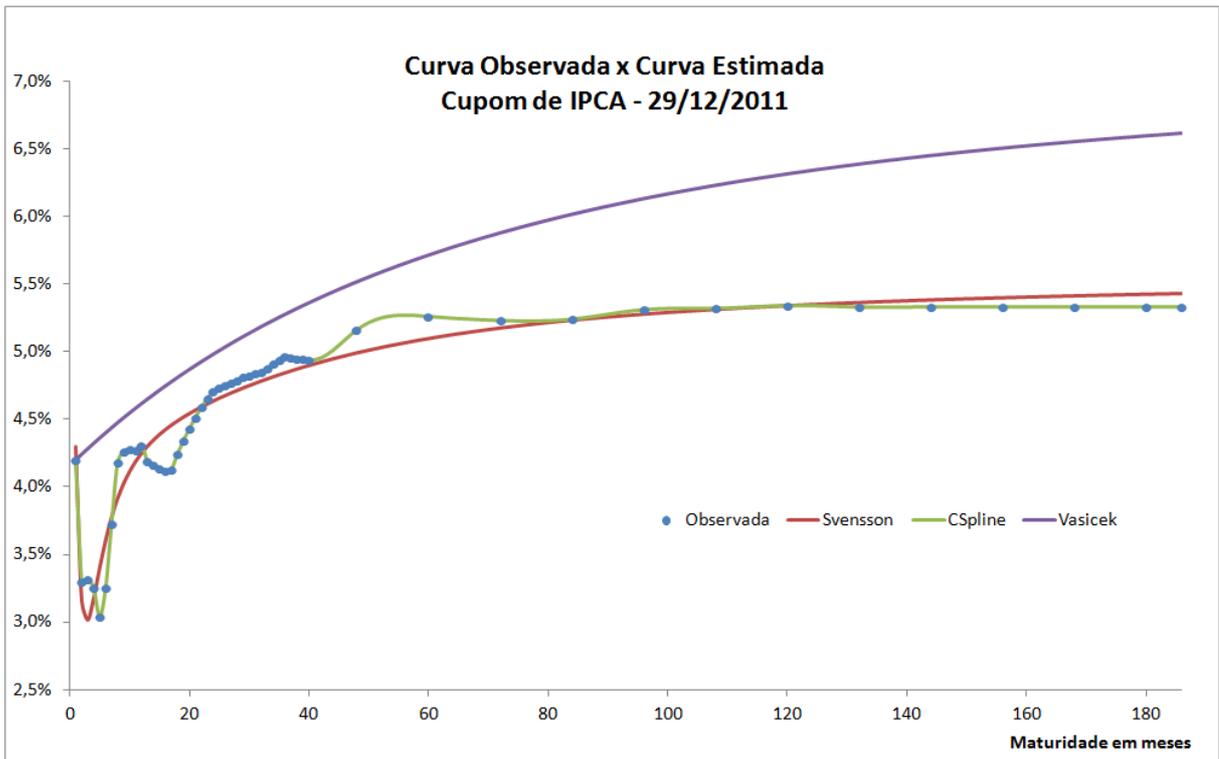


GRÁFICO 15 – Comparação das curvas estimadas e observada - Cupom IPCA - 29/12/2011

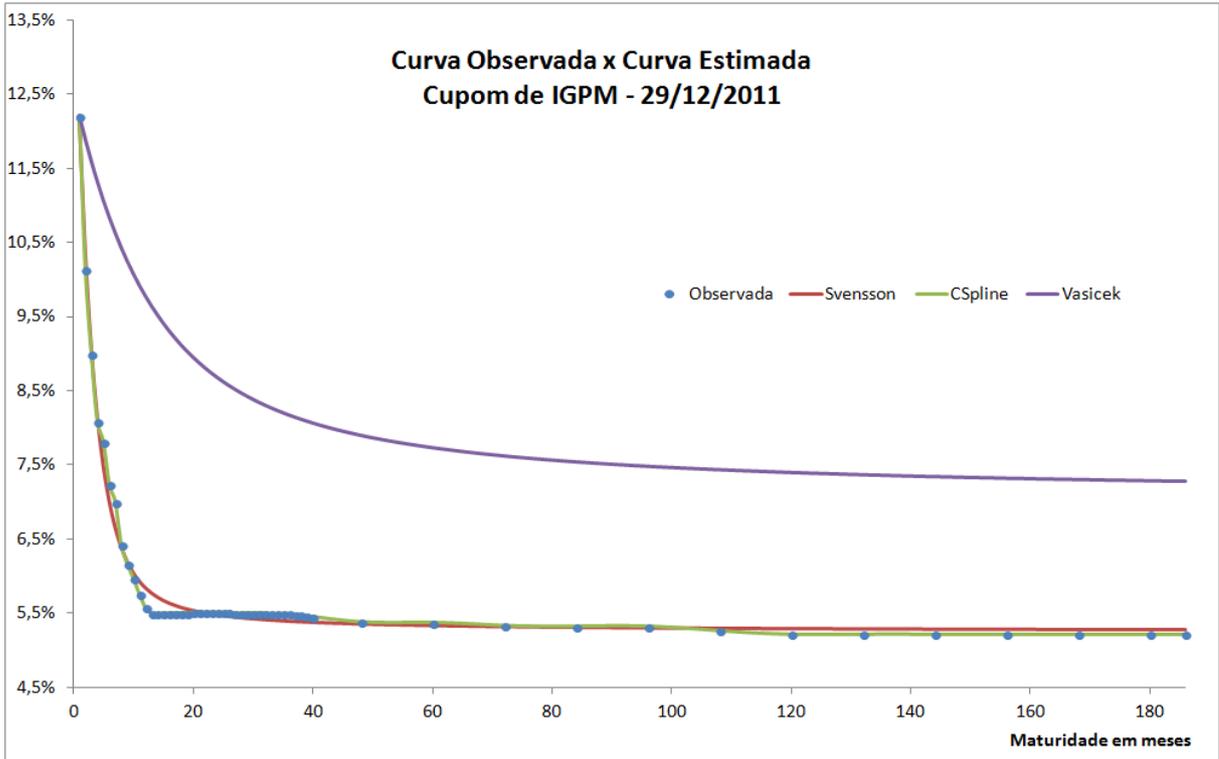


GRÁFICO 16 – Comparação das curvas estimadas e observada - Cupom IGPM - 29/12/2011

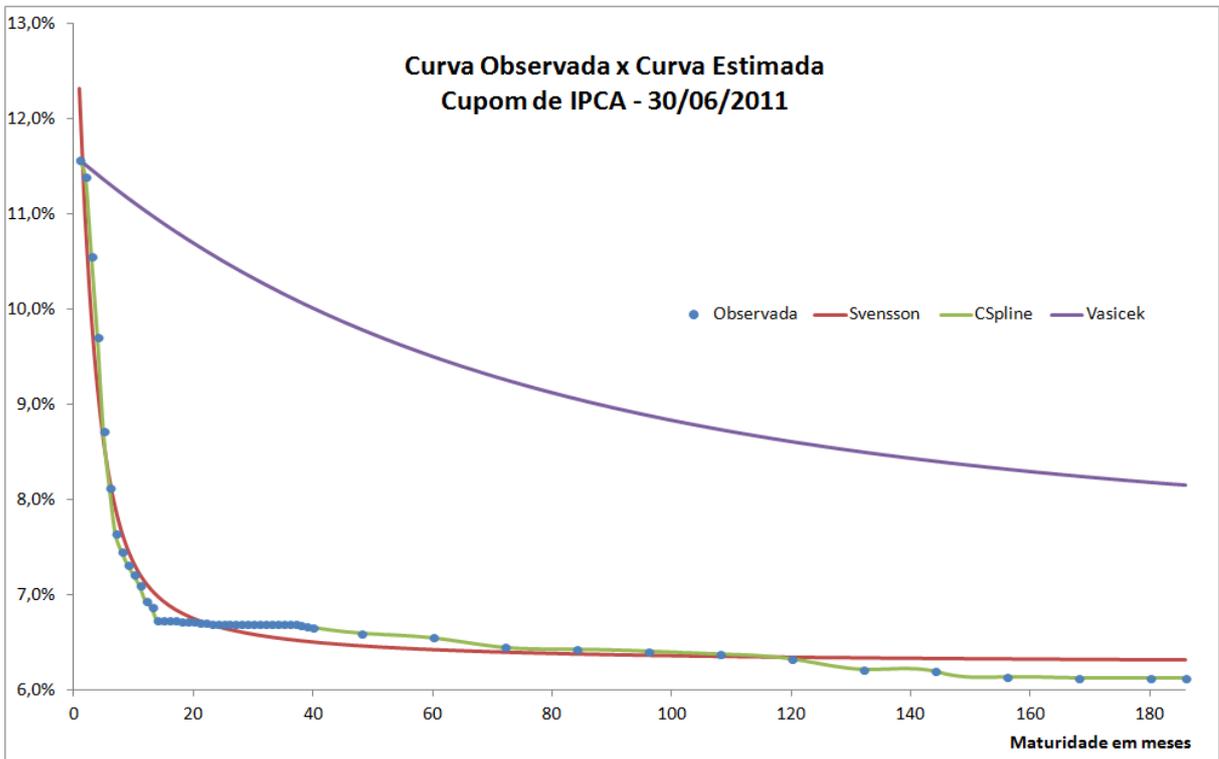


GRÁFICO 17 – Comparação das curvas estimadas e observada - Cupom IPCA - 30/06/2011

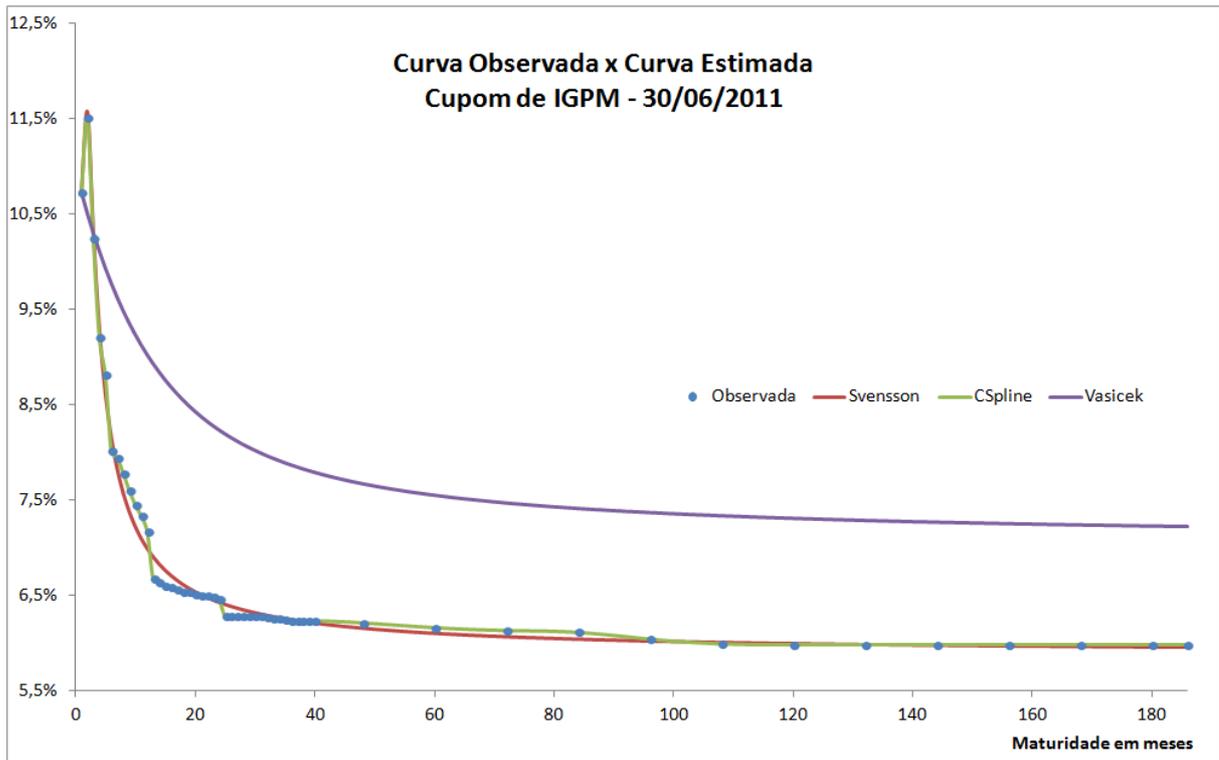


GRÁFICO 18 – Comparação das curvas estimadas e observada - Cupom IGPM - 30/06/2011

A análise visual da parte interpolada das curvas mostra a forma como os diferentes modelos se ajustam às taxas observadas. A curva ajustada por *Spline* Cúbico coincide com as taxas observadas, o que não é uma surpresa já que, por construção, este modelo não gera erro de estimativa. Por outro lado, seu traçado é menos suave, o que também já era esperado, pois ao perseguir as taxas observadas a curva interpolada acaba incorporando a oscilação das cotações de mercado. Seguindo com a análise para o modelo de Svensson, constatamos o *trade-off* que existe entre suavidade e erro, ou seja, a curva de juros ajustada por este modelo tem um traçado mais suave “serpenteando” entre as taxas observadas e, por esse motivo, apresenta erros de estimativa. O ajuste por Vasicek acentua estas características, desenhando uma curva comportada com o máximo de suavidade e também produzindo erros de estimativa maiores.

Além do desvio das taxas ajustadas em relação às taxas observadas, também é preciso analisar a discrepância entre as taxas ajustadas por modelos diferentes. A inspeção dos gráficos indica que existe uma discordância nas curvas ajustadas por modelos diferentes e que este desvio produz taxas estimadas diferentes para a mesma maturidade, inclusive com alguns *outliers*. O traçado da curva estimada por Svensson é balizado pelas taxas observadas, inclusive se cruzando ao longo do tempo, o que produz um efeito compensatório entre as

parcelas da Estimativa Corrente. A curva de juros ajustada por Vasicek, além de apresentar forma funcional menos flexível (prescinde de um fator “inclinação” para explicar as aberturas e fechamentos dos *spreads* entre taxas curtas e longas), busca a tendência das taxas levando em consideração seu comportamento histórico para cada maturidade, isto faz com que as taxas estimadas apresentem desvios maiores quando comparadas com aquelas observadas em um único dia.

Analisamos o bloco de seis gráficos (GRÁFICO 13 ao GRÁFICO 18) com a comparação das curvas de juros observadas e estimadas pelos modelos, dentro do período interpolado de 186 meses. Após sua inspeção concluímos que as taxas estimadas apresentam diferenças que refletem a arquitetura do modelo empregado em sua construção.

Segue bloco de seis gráficos (GRÁFICO 19 ao GRÁFICO 24) com a comparação das curvas de juros estimadas pelos modelos e que serão utilizadas no cálculo das estimativas correntes para as maturidades de 1 a 80 anos:

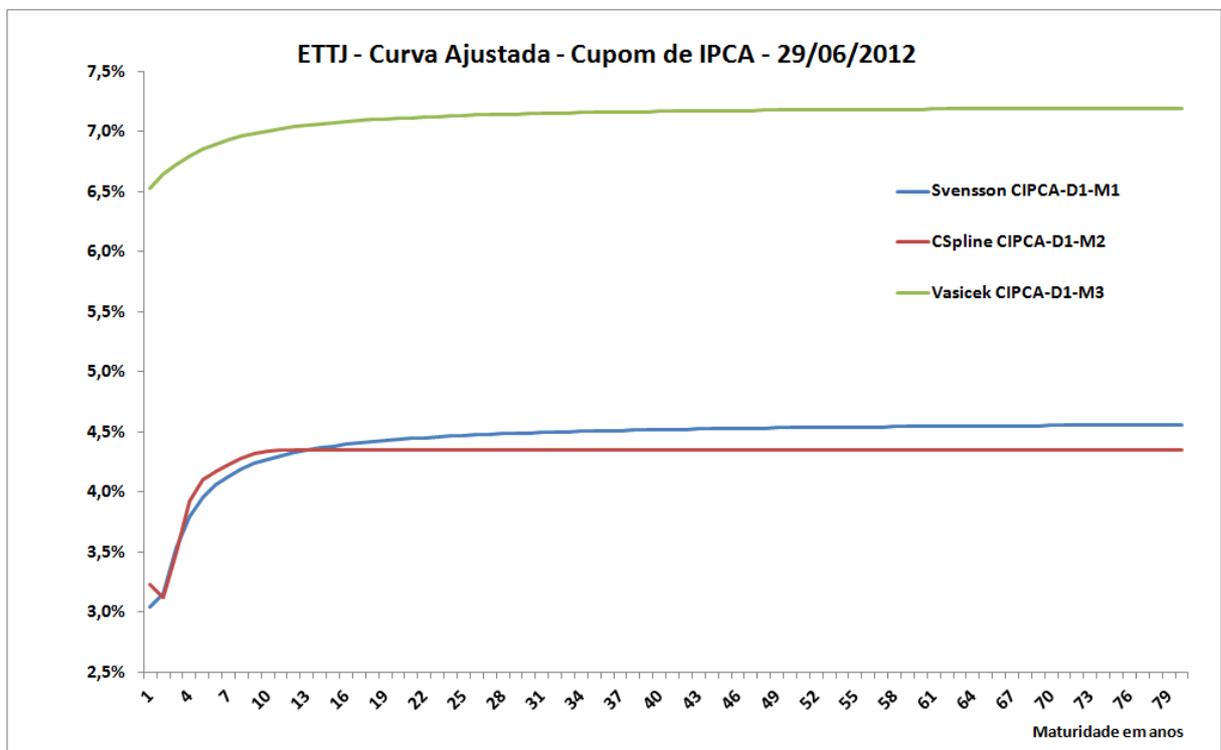


GRÁFICO 19 – Comparação das curvas de juros estimadas para cupom IPCA em 29/06/2012

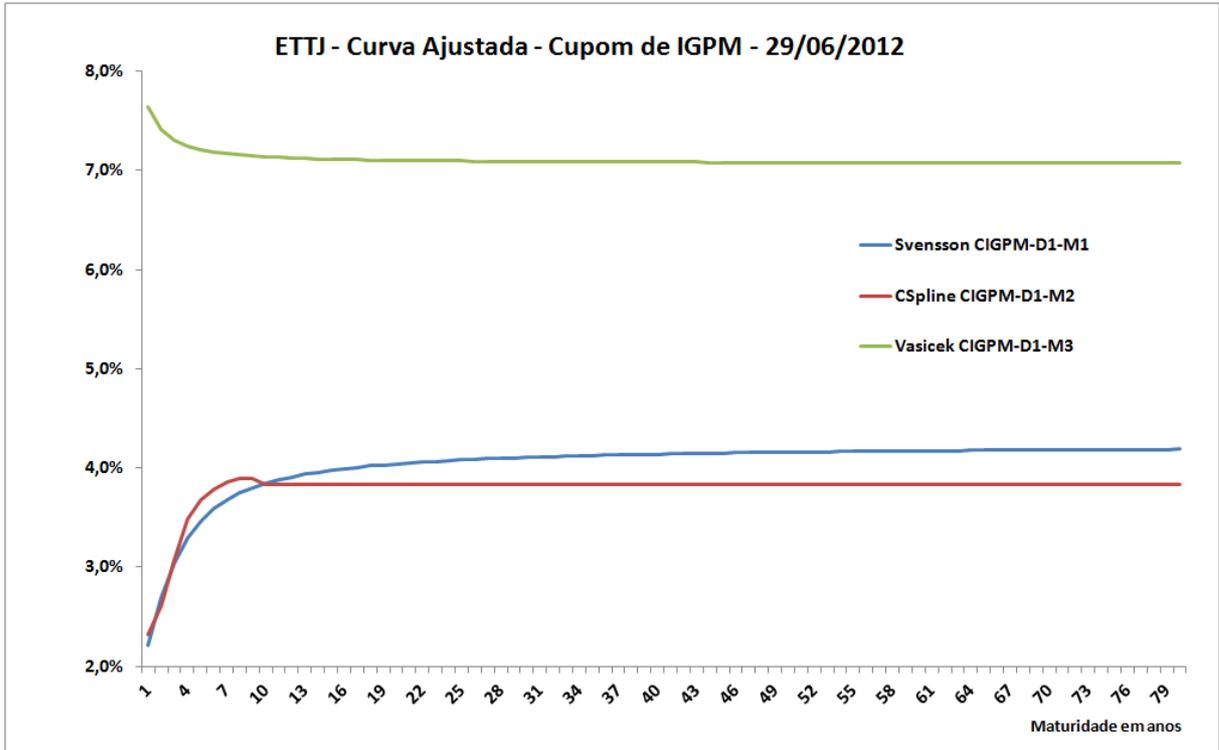


GRÁFICO 20 – Comparação das curvas de juros estimadas para cupom IGPM em 29/06/2012

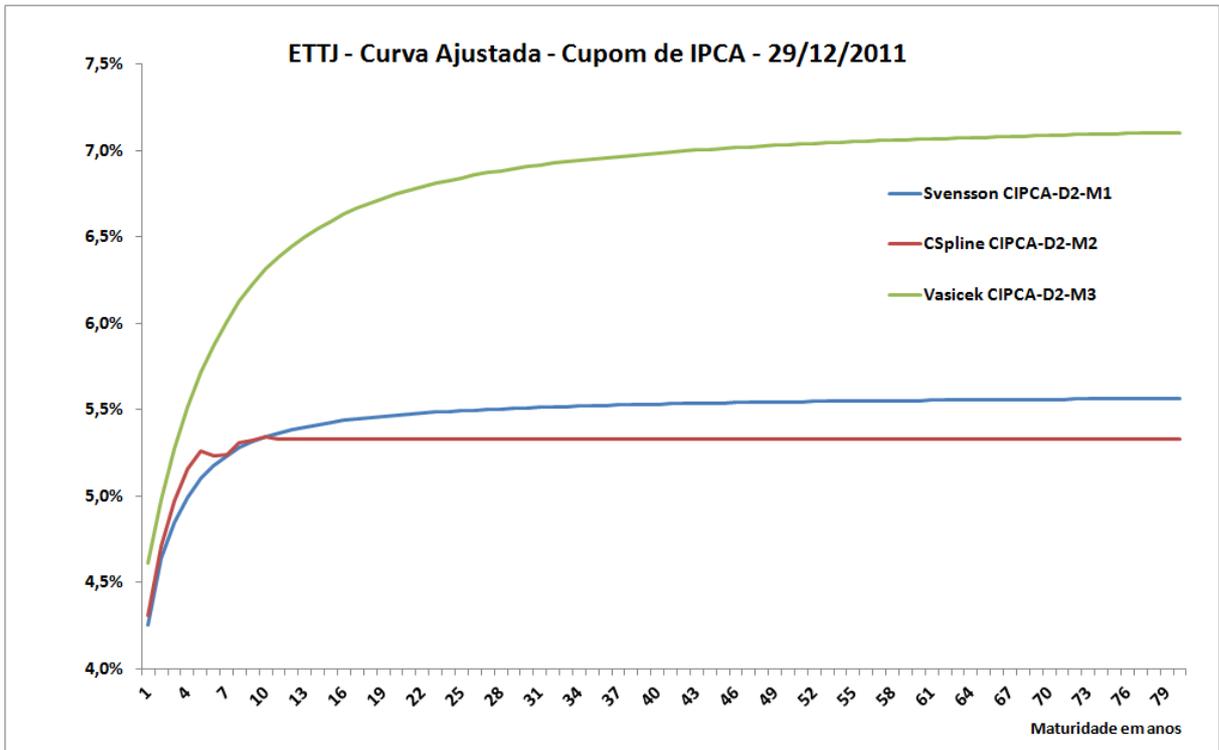


GRÁFICO 21 – Comparação das curvas de juros estimadas para cupom IPCA em 29/12/2011

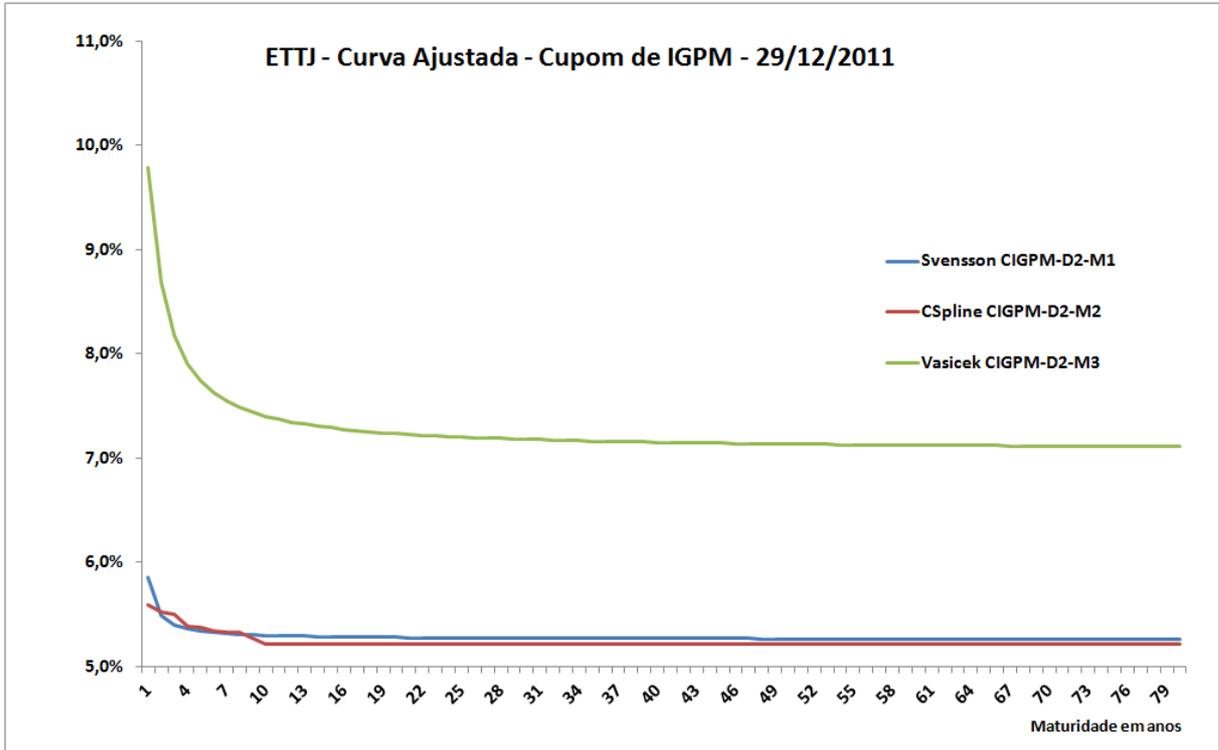


GRÁFICO 22 – Comparação das curvas de juros estimadas para cupom IGPM em 29/12/2011

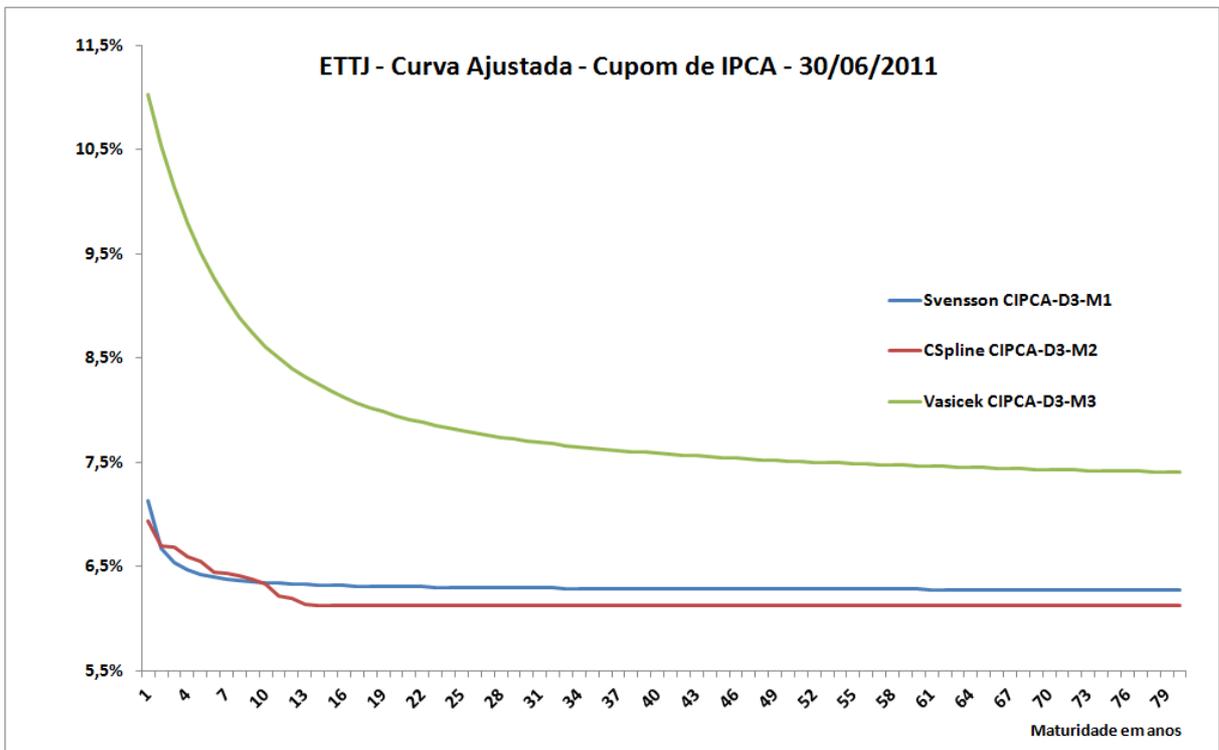


GRÁFICO 23 – Comparação das curvas de juros estimadas para cupom IPCA em 30/06/2011

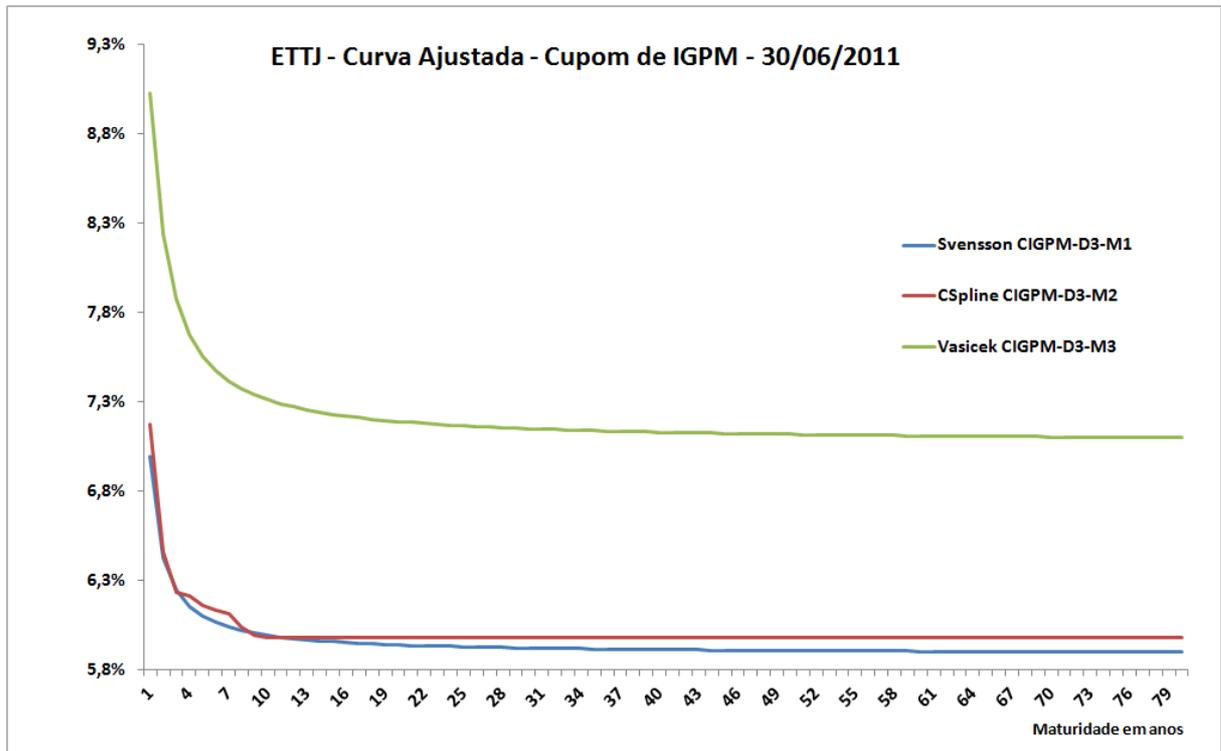


GRÁFICO 24 – Comparação das curvas de juros estimadas para cupom IGPM em 30/06/2011

Analizamos o bloco de seis gráficos (GRÁFICO 19 ao GRÁFICO 24) com a comparação das curvas de juros estimadas pelos modelos e que serão utilizadas no cálculo das estimativas correntes, para as maturidades de 1 a 80 anos. Após sua inspeção concluímos que:

- 1) As diferenças observadas no traçado das curvas da parte interpolada (maturidades entre 1 e 15 anos) da estrutura termo se propagam e são amplificadas na parte extrapolada (maturidades entre 16 e 80 anos). Este descolamento na trajetória das curvas ao longo das maturidades produz estimativas de taxas de juros persistentemente diferentes por um longo período de tempo;
- 2) As taxas estimadas pelos modelos apresentam diferenças que, dependendo do perfil de pagamento a ser descontado, tem o poder de interferir nos resultados da Estimativa Corrente;
- 3) Os modelos produzem curvas de juros que possuem trajetórias próprias que dependem exclusivamente da arquitetura empregada na sua construção.

5.2 FLUXOS DE CAIXA

A seguir, apresentamos os quatro fluxos de caixa teóricos que serão utilizados no cálculo das estimativas correntes de nosso estudo generalista. Também apresentamos os dois fluxos de caixa observados que serão utilizados no cálculo do TAP de nosso estudo de caso real. Os fluxos de caixa são a projeção temporal dos compromissos financeiros futuros

assumidos pela Seguradora para suas garantias oferecidas nos seguros com cobertura por sobrevivência. As projeções são feitas para uma carteira em *run-off*, ou seja, os valores projetados decorrem dos compromissos referentes aos participantes que a Seguradora tem em sua carteira no momento atual, não sendo projetado valores para futuros negócios que a Seguradora venha a fazer. Por se tratar de compromissos de longuíssimo prazo, os fluxos de caixa são indexados no tempo em períodos anuais no intervalo de 1 a 80 anos.

Os fluxos de caixa teóricos foram concebidos de modo a generalizar os diversos perfis que os compromissos das Seguradoras podem assumir no tempo. Admitimos que a carteira segurada tenha um histórico e uma massa de participantes que permita a busca de um padrão a ser projetado nas entradas e saídas de seu fluxo de caixa. Sendo assim, simulamos quatro fluxos com diferentes perfis: FCT1) Participantes em fase de acumulação que utilizam apenas parte do fundo acumulado para conversão em benefício de aposentadoria. A parte do fundo não utilizada é resgatada integralmente no momento da conversão. Neste fluxo existe uma concentração de conversão em torno do sexto ano e, conseqüentemente, um esforço de caixa deverá ser feito pela Seguradora para responder aos resgates da parte não convertida, fazendo com que a curva de pagamento tenha um pico nesta região do gráfico. FCT2) Participantes em fase de acumulação que utilizam apenas parte do fundo acumulado para conversão em benefício de aposentadoria. A parte do fundo não utilizada é resgatada periodicamente, de forma não programada, ao longo do período de concessão. O fato de os resgates da parte não convertida serem distribuídos ao longo do tempo provoca um achatamento na curva de pagamentos, alongando o perfil da dívida da Seguradora. FCT3) Participantes em fase de acumulação que utilizam integralmente o fundo acumulado para conversão em benefício de aposentadoria. Este fluxo permite maior uniformização do perfil de pagamentos, pois faz uma transição suave entre o período de acumulação e o período de concessão de benefícios no momento em que transforma todo o fundo acumulado em pequenos pagamentos que se darão no longo prazo. FCT4) Participantes em fase de concessão de benefícios. A curva de pagamentos para este fluxo é monotonicamente decrescente e representa o esgotamento da PMBC com os pagamentos dos benefícios contratados. Os próximos quatro gráficos (GRÁFICO 25 ao GRÁFICO 28) apresentam o perfil dos quatro fluxos de caixa teóricos discutidos:

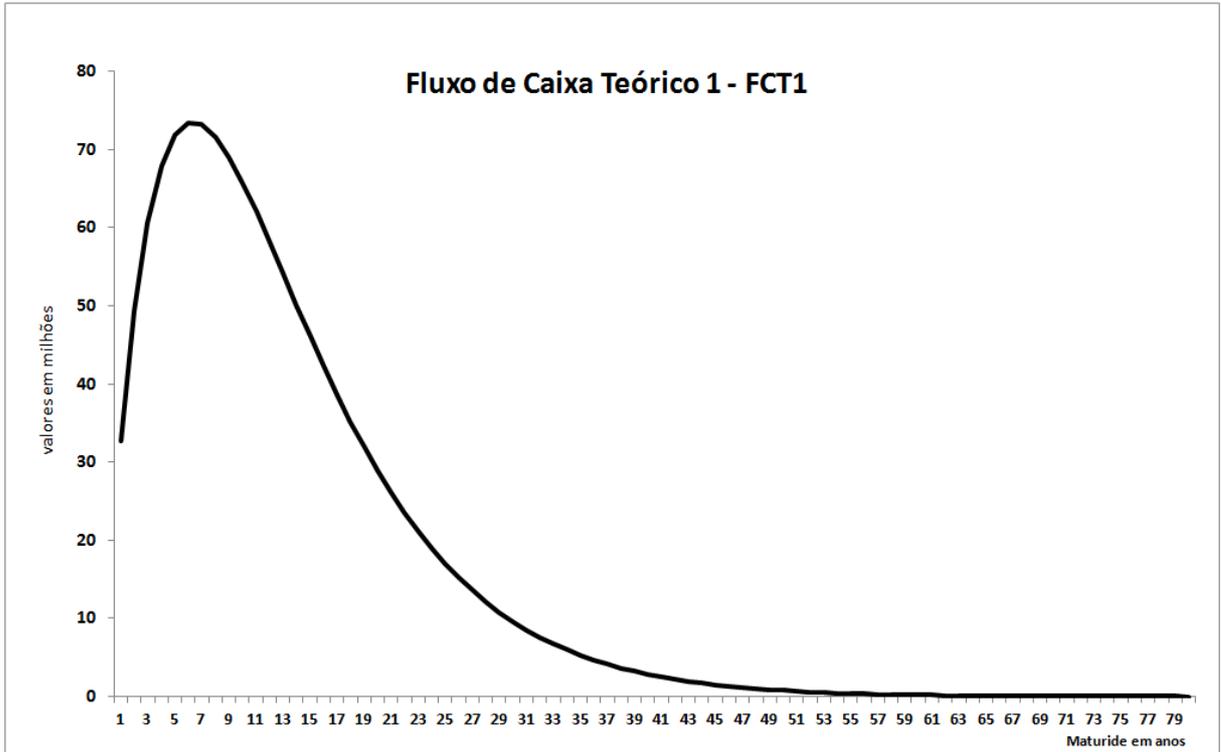


GRÁFICO 25 – Fluxo de Caixa Teórico 1 (perfil de pagamento para uma carteira hipotética)

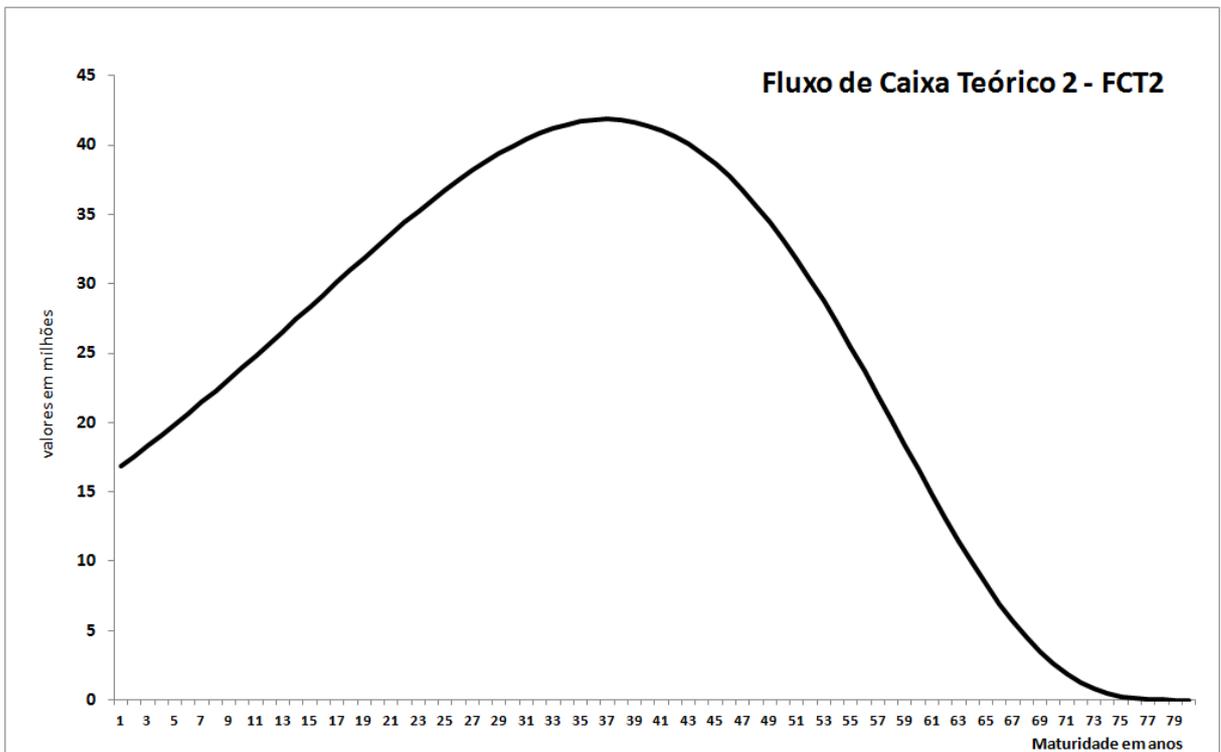


GRÁFICO 26 – Fluxo de Caixa Teórico 2 (perfil de pagamento para uma carteira hipotética)

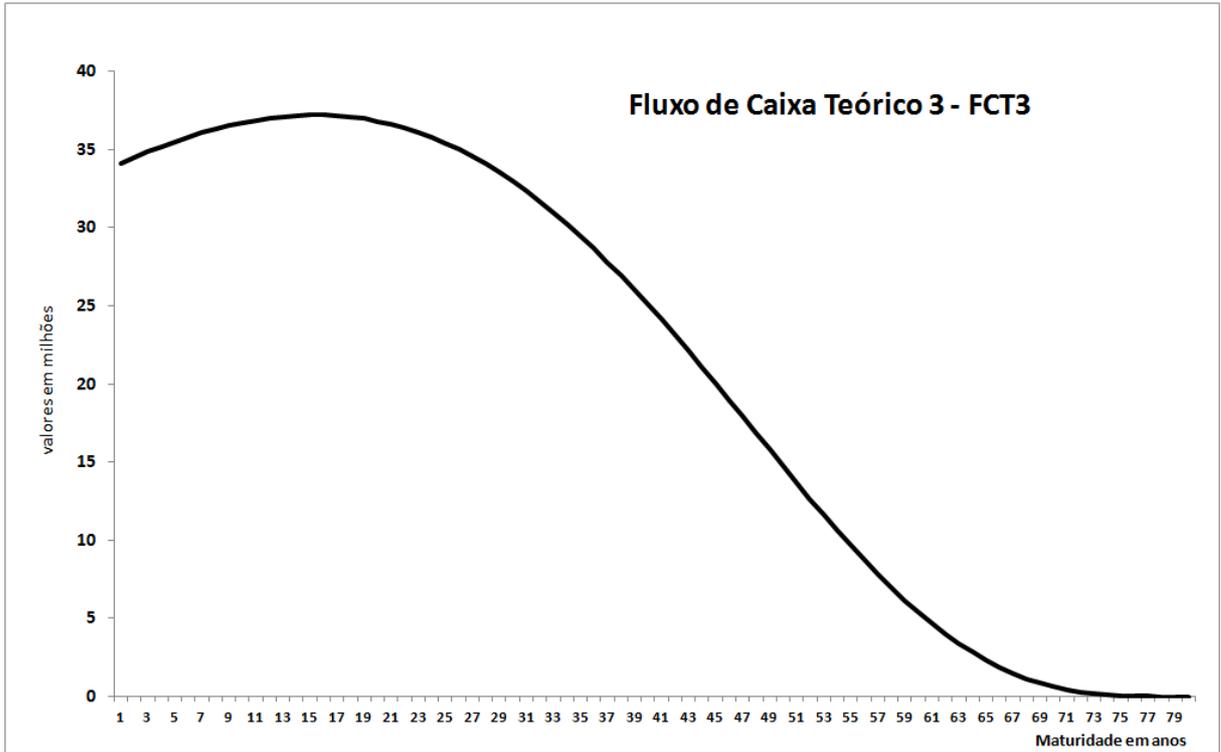


GRÁFICO 27 – Fluxo de Caixa Teórico 3 (perfil de pagamento para uma carteira hipotética)

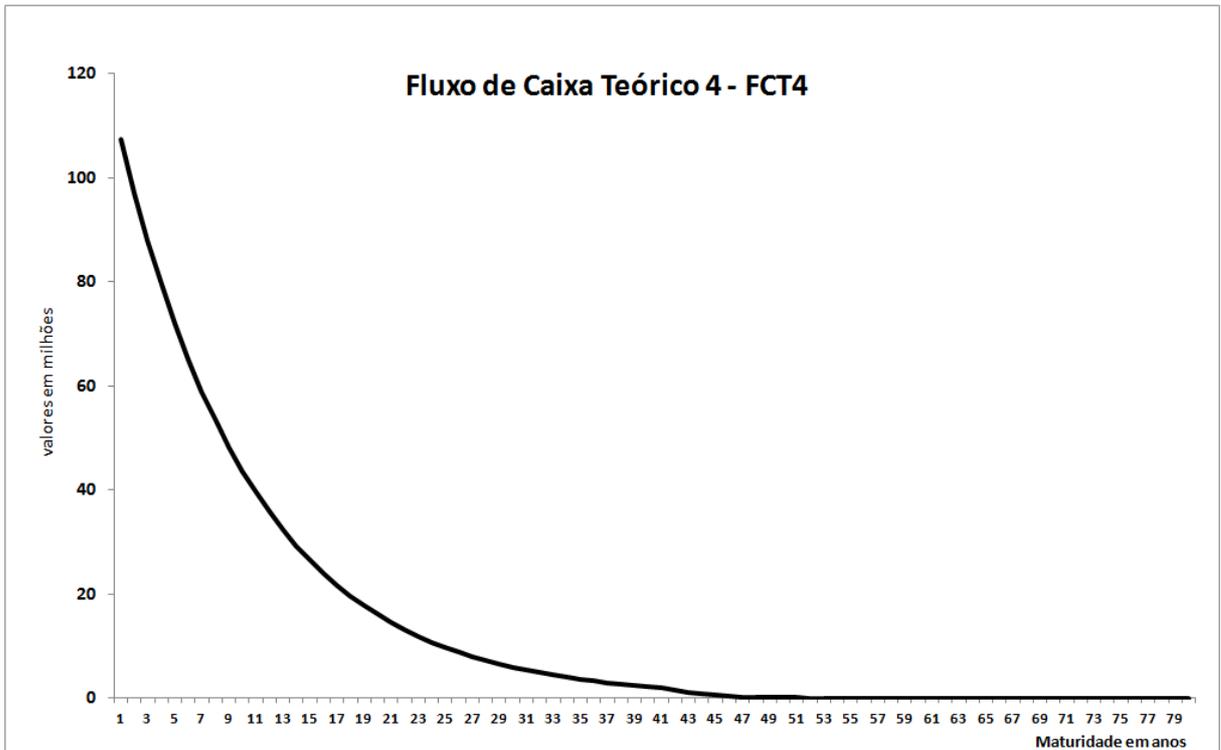


GRÁFICO 28 – Fluxo de Caixa Teórico 4 (perfil de pagamento para uma carteira hipotética)

Os fluxos de caixa observados foram obtidos junto a empresas do mercado através do “Termo de Consentimento” do APÊNDICE A. Nosso estudo para um caso real se apoia em um fluxo de caixa projetado para as obrigações decorrentes dos contratos de seguros com cobertura por sobrevivência. A fim de preservar a identidade dos negócios da empresa colaboradora, sugerimos que a geração do fluxo fosse feita pela própria empresa a partir de uma amostra de sua carteira e utilizando premissas próprias. Desta forma, nos será fornecido apenas a coluna dos valores agrupados e ordenados no tempo sem a possibilidade da extrapolação do perfil da operação ou da identificação dos participantes do plano. Informações complementares ao fluxo: Fase (Acumulação/Concessão), Produto (PGBL/VGBL/FGB), Base Técnica (Tábua/Juros/Índice), % de Excedente Financeiro e o Saldo Atual das Provisões Matemáticas, Insuficiência de Contribuição, Despesas Administrativas e de Excedente Financeiro. Selecionamos dois fluxos para nosso estudo de caso: FCO1) Amostragem de participantes ativos, em fase de acumulação, de uma carteira com garantia de rentabilidade de juros de 6% ao ano mais variação do IGPM e tábua contratual AT49. FCO2) Amostragem de participantes assistidos, em fase de concessão, de uma carteira com garantia de rentabilidade de juros de 6% ao ano mais variação do IGPM e tábua contratual AT55. Os próximos dois gráficos (GRÁFICO 29 e GRÁFICO 30) apresentam o perfil dos dois fluxos de caixa observados:

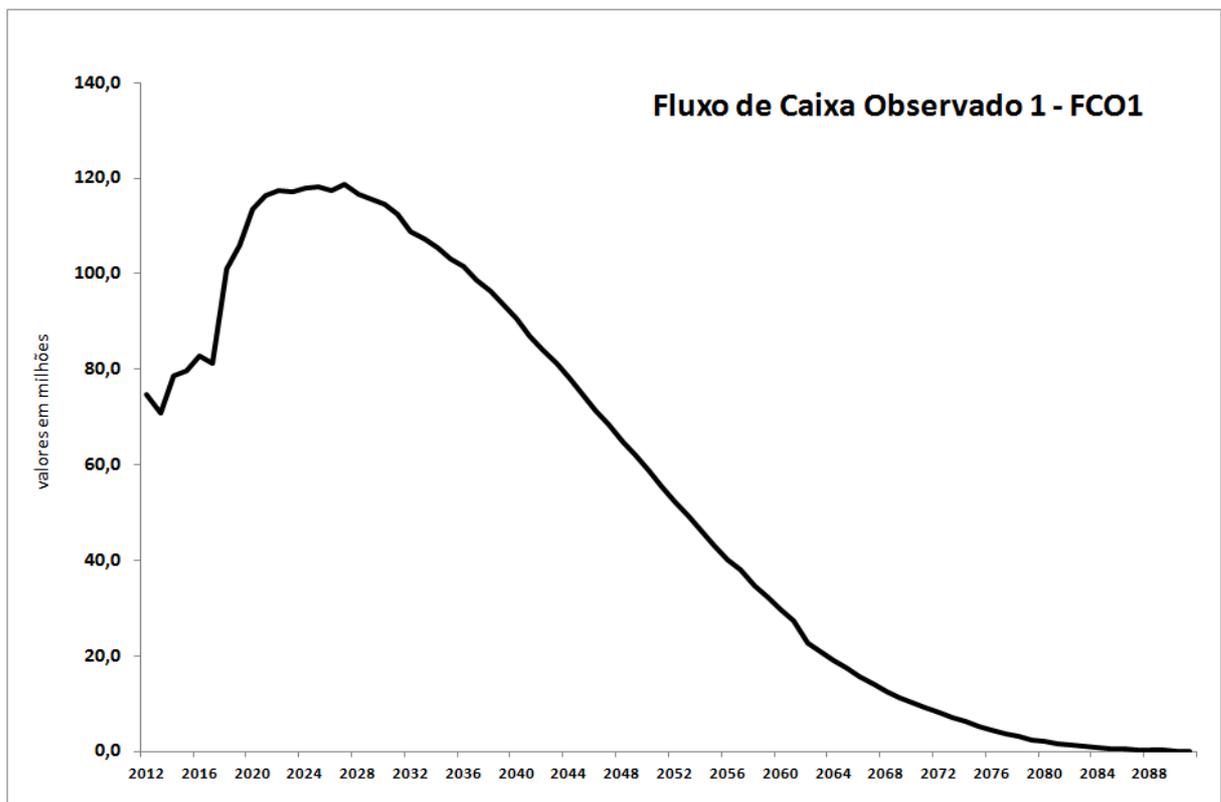


GRÁFICO 29 – Fluxo de Caixa Observado 1 (perfil de pagamento para uma carteira real)

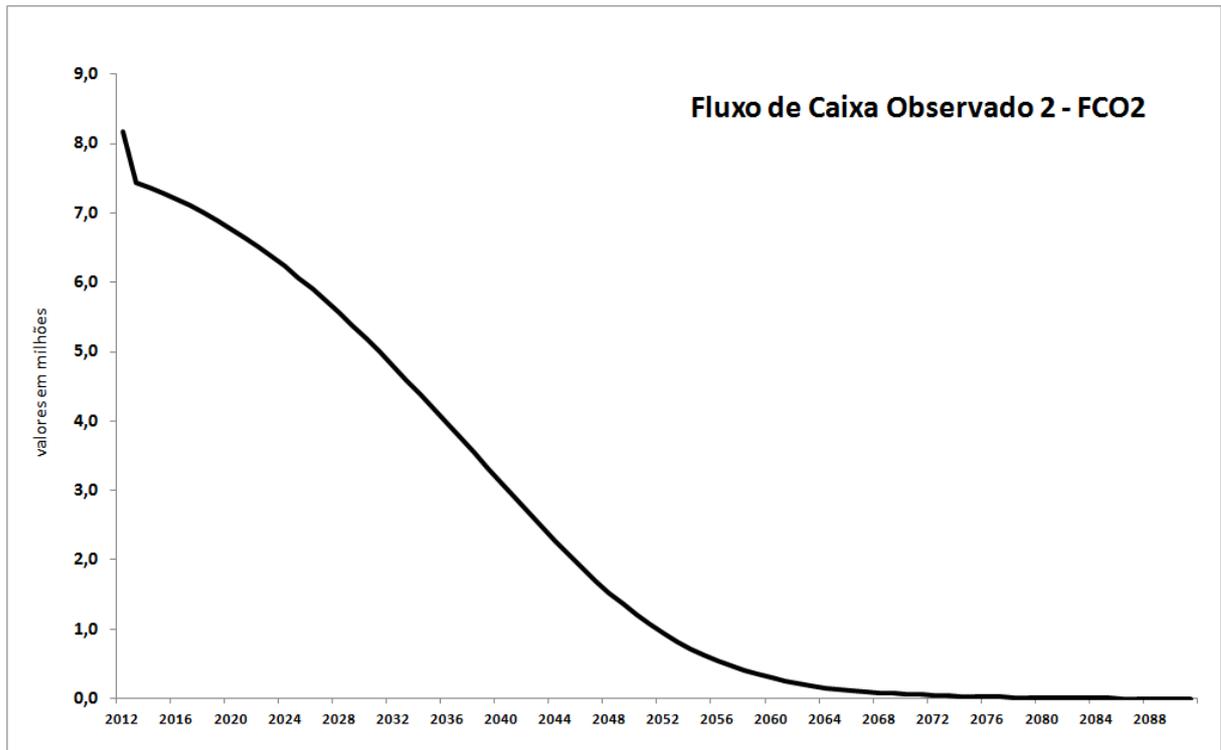


GRÁFICO 30 – Fluxo de Caixa Observado 2 (perfil de pagamento para uma carteira real)

5.3 ESTIMATIVA CORRENTE DOS FLUXOS DE CAIXA TEÓRICOS

Nosso objetivo é descontar os fluxos de caixa teóricos pelas taxas da ETTJ construída de acordo com os três modelos discutidos anteriormente, analisar os resultados obtidos e verificar o impacto que a modelagem da taxa de juros produz na Estimativa Corrente dos compromissos financeiros futuros decorrentes das garantias oferecidas nos seguros com cobertura por sobrevivência. Admitimos que os fluxos teóricos tenham a garantia de correção monetária pelo IPCA e foram gerados em valores constantes, ou seja, o fluxo é desindexado do IPCA. Por esse motivo utilizaremos a ETTJ de Cupom IPCA (CIPCA) para calcular as estimativas correntes utilizando a seguinte fórmula: $\sum_{t=1}^{80} \frac{FC_t}{(1+i_t)^t}$, onde FC_t é o valor do fluxo de caixa na data t e i_t é a taxa a vista de juros para o vencimento t , extraída da ETTJ. Seguem os resultados (FIGURA 5 a FIGURA 7):

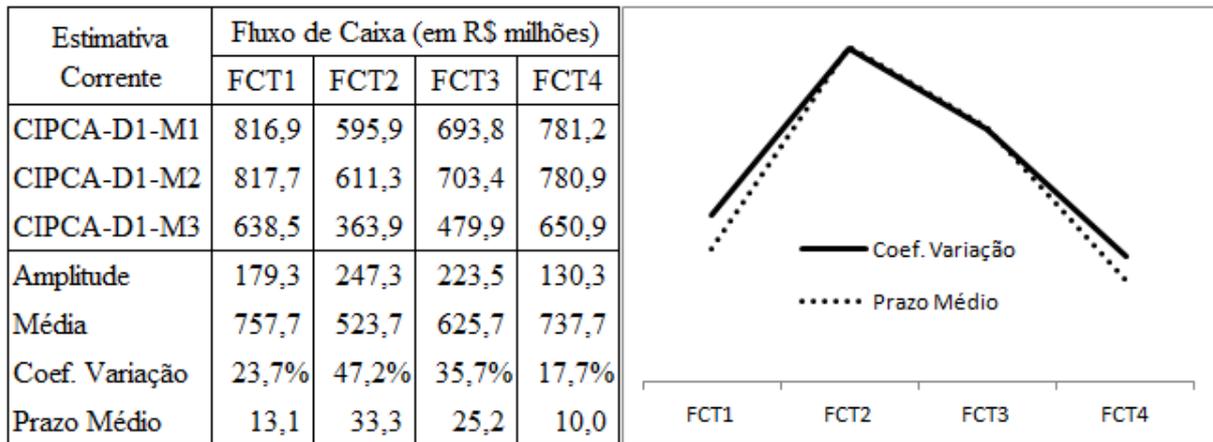


FIGURA 5 - Estimativa Corrente - Data Ref. 29/06/2012 - Fluxo de Caixa Teórico - Cupom IPCA

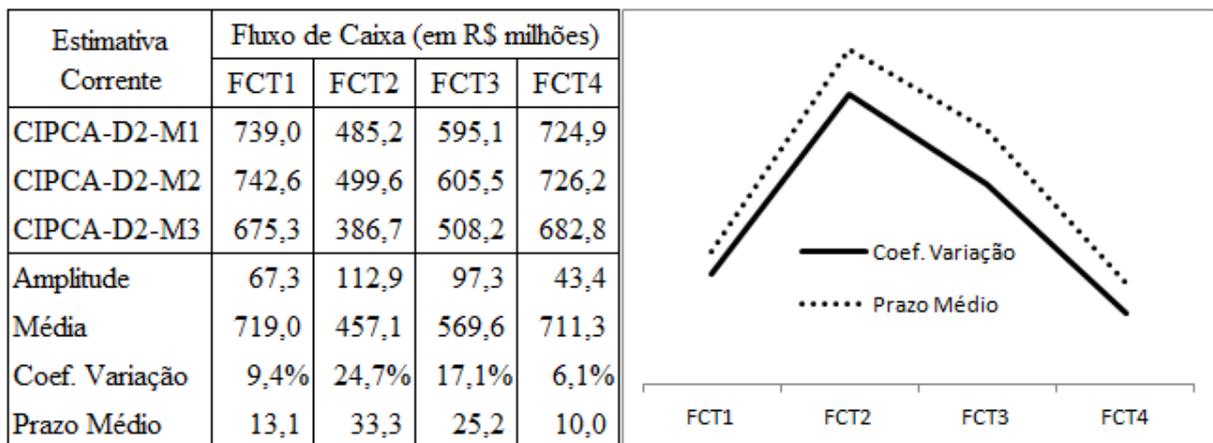


FIGURA 6 - Estimativa Corrente - Data Ref. 29/12/2011 - Fluxo de Caixa Teórico - Cupom IPCA

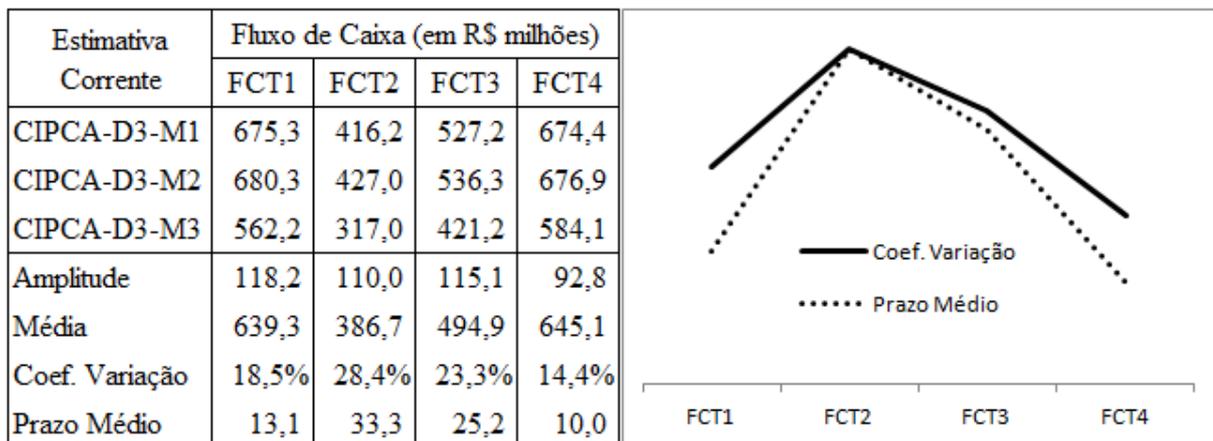


FIGURA 7 - Estimativa Corrente - Data Ref. 30/06/2011 - Fluxo de Caixa Teórico - Cupom IPCA

Os resultados foram segmentados em três tabelas tendo por base as datas de referência usadas para modelagem das curvas de juros: 29/06/2012 (D1), 29/12/2011 (D2) e 30/06/2011 (D3). As tabelas foram arranjadas em três linhas e quatro colunas, as linhas indicando o modelo de ETTJ que foi utilizado para descontar o fluxo (Svensson (M1), *Spline* Cúbico (M2) e Vasicek (M3)) e as colunas indicando o perfil do fluxo de caixa teórico que foi

descontado (FCT1, FCT3, FCT3 e FCT4). Assim, cada tabela oferece um conjunto de 12 estimativas correntes para cada uma das datas utilizadas na geração das curvas de juros. Como os fluxos de caixa são teóricos eles podem se ajustar a qualquer data de referência.

Estamos interessados em analisar o efeito que a modelagem da taxa de juros exerce na Estimativa Corrente de um determinado fluxo de caixa. Para esse fim, escolhemos a *amplitude* como medida de dispersão das estimativas correntes. Por representar a distância entre o maior e o menor resultado encontrado entre os três modelos utilizados no desconto do fluxo, a amplitude permite uma leitura direta do impacto financeiro que a escolha do modelo mais conservador tem sobre o modelo menos conservador. Como os fluxos descontados têm diferentes níveis de desencaixe, a amplitude acompanhará este desnivelamento dificultando a comparação da dispersão entre os fluxos. Para contornar esta dificuldade criamos um *coeficiente de variação*, que consiste na relação entre a amplitude e a média aritmética das estimativas correntes, ou seja, estamos representando a amplitude como um percentual da média. Esta medida indica o erro médio em que a Seguradora estaria incorrendo na avaliação de seu passivo se escolhesse aleatoriamente um dos três modelos para descontar o fluxo de suas obrigações. Além disso, a relação proposta tem a conveniência de ser adimensional, o que permite a comparação entre os diferentes perfis de fluxos.

Também calculamos o prazo médio ponderado em anos de cada fluxo de acordo com a seguinte fórmula: $Prazo\ Médio = [\sum_{t=1}^{80} FC_t \times t] / [\sum_{t=1}^{80} FC_t]$, onde FC_t é o valor do fluxo na data t . Poderíamos conseguir a mesma medida utilizando a fórmula da *Duration* que pondera o prazo pelo valor presente de FC_t , no entanto, esta medida mais precisa de prazo médio sofre interferência da curva de juros, que é justamente o efeito que queremos isolar.

Faremos duas análises: uma vertical no sentido dos fluxos de caixa, verificando a sensibilidade da Estimativa Corrente à escolha do modelo da curva de juros e outra horizontal, no sentido dos modelos, verificando a sensibilidade da Estimativa Corrente à escolha de um perfil de pagamento.

A análise vertical dos resultados para o dia 29/06/2012 indica que a Estimativa Corrente é sensível à escolha do modelo. Observamos que a amplitude variou entre 130,3 milhões (coeficiente de variação 17,7%) e 247,3 milhões (coeficiente de variação 47,2%). Uma dispersão desta magnitude indica que a Estimativa Corrente calculada com as taxas do modelo posicionado na ponta inferior da amplitude, poderia ser acomodada dentro de um passivo constituído pela Seguradora (NCA) sem gerar insuficiência de provisões (TAP). Por

outro lado, a Estimativa Corrente calculada com as taxas do modelo posicionado na ponta superior da amplitude poderia extrapolar o passivo constituído indicando a insuficiência das provisões. Ou seja, poderíamos ter uma inversão no resultado do TAP dependendo do modelo escolhido para construção da ETTJ.

A principal conclusão da análise horizontal para o dia 29/06/2012 pode ser visualizada no gráfico anexo à tabela: a correlação existente entre o perfil do fluxo de caixa, na medida de seu prazo médio, e a dispersão da Estimativa Corrente provocada pelos modelos, na medida do coeficiente de variação. Esta relação direta entre as medidas indica que o impacto da escolha do modelo na Estimativa Corrente será maior quando o perfil do fluxo de caixa for mais longo. Podemos concluir que fluxos de caixa com concentração de pagamentos nas maturidades mais longas (perfil longo), sofrem de forma mais intensa o efeito cumulativo dos *gaps* entre as taxas de juros modeladas por técnicas diferentes. Este efeito é agravado pelo descolamento que pode ocorrer entre as trajetórias das curvas de juros nas maturidades extrapoladas (mais longas).

As análises para as datas de referência 29/12/2011 e 30/06/2011 procedem de forma análoga e, pela simetria dos resultados apresentados nas figuras 5, 6 e 7, chegaremos a conclusões semelhantes à análise da data de referência 29/06/2012: a Estimativa Corrente é sensível à escolha do modelo utilizado na construção da ETTJ e que esta sensibilidade aumenta com a longevidade do fluxo de caixa que está sendo descontado. Deste modo e sem perda de continuidade, propomos uma mudança na estrutura de análise dos resultados onde deixaremos de nos preocupar com o efeito da modelagem e passaremos a nos interessar unicamente pelo efeito que a mudança na data de referência tem na Estimativa Corrente. A TABELA 7 apresenta os resultados da Estimativa Corrente por data de referência e perfil de pagamentos. Como não estamos interessados no modelo utilizado na construção da ETTJ, queremos apenas uma curva de juros típica da data de referência em análise, extraímos a Estimativa Corrente da linha “Média”, das tabelas associadas às figuras 5, 6 e 7.

TABELA 7 - Estimativa Corrente - Fluxo de Caixa Teórico - Cupom IPCA

Valores em R\$ milhões	FCT1	FCT2	FCT3	FCT4
Data Referência 1 - 29/06/2012	757,7	523,7	625,7	737,7
Data Referência 2 - 29/12/2011	719,0	457,1	569,6	711,3
Data Referência 3 - 30/06/2011	639,3	386,7	494,9	645,1
Amplitude	118,4	137,0	130,8	92,5

Os resultados desta tabela indicam que a Estimativa Corrente é sensível à escolha da data em que a ETTJ foi construída. De fato, como os fluxos de caixa não se alteraram e utilizamos uma curva de juros típica, que foi construída com base nas taxas cotadas em cada uma das três datas de referência, as diferenças se devem à oscilação que o mercado de renda fixa e seus derivativos apresentam ao longo do tempo. Podemos dizer que, mesmo que os compromissos futuros projetados (fluxos de caixa) de uma Seguradora não se alterem de uma data para outra (apenas uma hipótese simplificadora), a Estimativa Corrente será um valor incerto, pois depende dos fatores macroeconômicos (expectativa de inflação, nível de atividade econômica e outros) vigentes na data em que a ETTJ, utilizada para descontar o fluxo de caixa, for construída.

Finalmente, a análise dos resultados indica que: 1) A Estimativa Corrente é sensível à escolha do modelo utilizado na construção da ETTJ; 2) Esta sensibilidade aumenta com a longevidade do fluxo de caixa que está sendo descontado; 3) A Estimativa Corrente é um valor incerto no tempo, dado que a ETTJ depende dos fatores macroeconômicos vigentes na data de sua construção.

5.4 TESTE DE ADEQUAÇÃO DE PASSIVO DOS FLUXOS DE CAIXA OBSERVADOS

Este teste tem o mesmo propósito do teste anterior, mas desta vez aplicado para um caso prático. Assim, nosso objetivo é descontar os fluxos de caixa observados pelas taxas da ETTJ construída de acordo com os três modelos discutidos anteriormente, analisar os resultados obtidos e verificar o impacto que a modelagem da taxa de juros produz na Estimativa Corrente dos compromissos financeiros futuros decorrentes das garantias oferecidas nos seguros com cobertura por sobrevivência. Além disso, por se tratar de uma carteira de seguros real será possível efetuar o TAP, pois junto com o fluxo de caixa nos foram fornecidas as Provisões Técnicas efetivamente constituídas para esta carteira.

O Teste de Adequação de Passivo tem por objetivo verificar se o *Net Carrying Amount* (provisões técnicas deduzidas das despesas de comercialização diferidas e dos ativos intangíveis relacionados) é suficiente para suportar a Estimativa Corrente dos fluxos de caixa futuros dos contratos de seguro descontados pela Estrutura a Termo da Taxa de Juros livre de risco. Havendo insuficiência de provisões, esta deve ser reconhecida imediatamente. Para fins desta aplicação, e sem perda de representatividade, o NCA será composto exclusivamente das Provisões Técnicas. Como nosso estudo está delimitado às operações de seguros com

cobertura por sobrevivência, as Provisões Técnicas serão compostas por: PMBaC, PMBC, PIC, PDA e PEF.

Selecionamos dois fluxos de caixa observados para nosso estudo de caso: FCO1) Amostragem de participantes ativos em fase de acumulação de uma carteira com garantia de juros de 6% ao ano mais variação do IGPM e tábua contratual AT49. FCO2) Amostragem de participantes assistidos em fase de concessão de uma carteira com garantia de rentabilidade de juros de 6% ao ano mais variação do IGPM e tábua contratual AT55. Estes fluxos foram originalmente gerados em valores constantes, ou seja, o fluxo é desindexado do IGPM e por esse motivo, utilizaremos a ETTJ de Cupom IGPM (CIGPM) para calcular as estimativas correntes utilizando a seguinte fórmula: $\sum_{t=1}^{80} \frac{FC_t}{(1+i_t)^t}$, onde FC_t é o valor do fluxo de caixa na data t e i_t é a taxa a vista de juros para o vencimento t extraída da ETTJ. A data de referência utilizada pela Seguradora para geração das informações foi 31/12/2011, isto significa que os saldos das provisões informadas foram contabilizados nesta data e a geração dos dois fluxos de caixa tem esta data como instante zero, para onde devem convergir todas as estimativas correntes. Sendo assim, utilizaremos a ETTJ de Cupom IGPM de 29/12/2011 (CIGPM-D2)

Inicialmente, voltamos à seção 5.2 Fluxos de Caixa e notamos a semelhança existente entre os perfis de pagamento dos fluxos observados com os perfis dos fluxos teóricos. De fato, a curva desenhada pelo fluxo observado FCO1 poderia ser “encaixada” entre as curvas desenhadas pelos fluxos teóricos FCT2 e FCT3, indicando que a carteira de participantes ativos em análise tem propensão à conversão e que a parte eventualmente não convertida é resgatada de forma fracionada. Da mesma forma, a curva de pagamentos do fluxo observado FCO2 é muito parecida com curva de pagamentos do fluxo teórico FCT4, isso se deve ao fato dos fluxos serem compostos por participantes em fase de concessão de benefícios, cuja principal característica é ser monotonicamente decrescente, representando o consumo da reserva destinada ao pagamento destes benefícios. Agora vamos aos resultados numéricos da TABELA 8, iniciando pela discussão da Estimativa Corrente:

TABELA 8 - Estimativa Corrente - Fluxo de Caixa Observado - 29/12/2011 - Cupom IGPM

Valores em R\$ mil	FCO1	FCO2
CIGPM-D2-M1	1.641.899	96.198
CIGPM-D2-M2	1.653.525	96.649
CIGPM-D2-M3	1.254.362	78.385
Amplitude	399.163	18.264
Média	1.516.596	90.411
Coef. Variação	26,3%	20,2%
Prazo Médio	23,5	16,5

Verificamos que a Estimativa Corrente descontada pela taxa modelada por *Spline* Cúbico (M2) se encontra na ponta superior da amplitude para os dois fluxos, enquanto a Estimativa Corrente descontada pela taxa modelada por Vasicek (M3) se encontra na ponta inferior da amplitude, para os dois fluxos também. Isso indica um conservadorismo do modelo *Spline* Cúbico em relação aos demais modelos. Também verificamos a mesma relação direta entre prazo médio e a dispersão dos fluxos teóricos: a carteira de participantes ativos, que tem perfil de pagamentos mais longo (prazo médio de 23,5 anos) apresentou dispersão maior (coeficiente de variação 26,3%) do que a carteira de participantes assistidos, que tem perfil de pagamentos mais curto (prazo médio de 16,5 anos) com coeficiente de variação de 20,2%. Da mesma forma, podemos concluir que fluxos de caixa com concentração de pagamentos nas maturidades mais longas (perfil longo) sofrem de forma mais intensa o efeito cumulativo dos *gaps* entre as taxas de juros modeladas por técnicas diferentes. Este efeito é agravado pelo descolamento que pode ocorrer entre a trajetória das curvas de juros nas maturidades extrapoladas (mais longas). Passamos à análise dos resultados do Teste de Adequação de Passivo na TABELA 9:

TABELA 9 - Teste de Adequação de Passivo - Fluxo Observado - 29/12/2011 - Cupom IGPM

TAP - Teste de Adequação de Passivo (em R\$ mil)		FCO1	FCO2
Provisões Técnicas	PMB + PEF	1.432.688	64.787
	PIC + PDA	93.058	31.746
	NCA	1.525.746	96.533
Estimativa Corrente	Svensson	1.641.899	96.198
	CSpline	1.653.525	96.649
	Vasicek	1.254.362	78.385
Teste de Adequação de Passivo: Provisões Técnicas - Estimativa Corrente	Svensson	-116.153	336
	CSpline	-127.779	-116
	Vasicek	271.384	18.148

O Teste de Adequação de Passivo (TAP) é a diferença entre as Provisões Técnicas constituídas pela Seguradora (NCA) e a Estimativa Corrente do fluxo de suas obrigações futuras descontado pela ETTJ estimada para cada um dos modelos em discussão: Svensson, *Spline* Cúbico e Vasicek. A análise da Estimativa Corrente já havia mostrado que o modelo *Spline* Cúbico foi o mais conservador e, por esse motivo, seria esperado que seu fluxo descontado exigisse mais recursos da empresa no TAP, o que realmente aconteceu. O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao modelo de Vasicek, que por ser menos conservador exigiu menos recursos da empresa. A conclusão mais importante deste teste é a de que a escolha do modelo utilizado para estimar a ETTJ pode inverter o resultado do TAP. Para o fluxo de caixa dos participantes ativos (FCO1), os modelos de Svensson e *Spline* Cúbico indicam uma insuficiência de provisão enquanto o modelo de Vasicek aponta uma suficiência. Para o fluxo de caixa dos participantes assistidos (FCO2), o modelo *Spline* Cúbico indica uma insuficiência de provisão enquanto que os demais apontam uma suficiência.

Podemos fazer, neste caso também, o mesmo exercício que fizemos no teste anterior (para os fluxos de caixa teóricos), quando isolamos o efeito da modelagem e passamos a analisar o impacto da mudança da data de referência no resultado da Estimativa Corrente e, por consequência, do TAP. Da mesma forma e apenas como hipótese simplificadora, vamos supor que a obrigação projetada da Seguradora (seus fluxos de caixa observados) se mantém constante para as três datas de referência. Neste caso, porém, vamos aplicar uma análise qualitativa, onde faremos a inspeção das curvas de juros desenhadas pelo mesmo modelo, mas em datas diferentes, e visualizar as discrepâncias nas suas trajetórias, conforme GRÁFICO 31, GRÁFICO 32 e GRÁFICO 33:

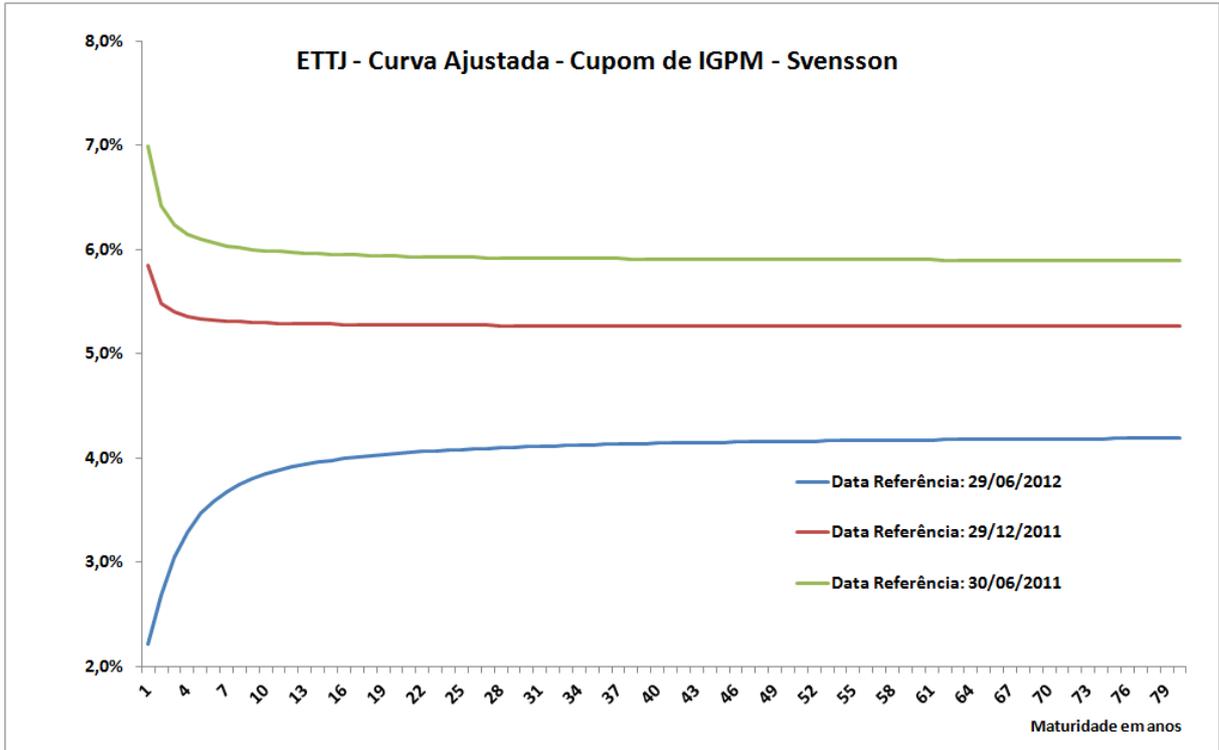


GRÁFICO 31 – Compara as curvas de juros estima por Svensson para cupom IGPM

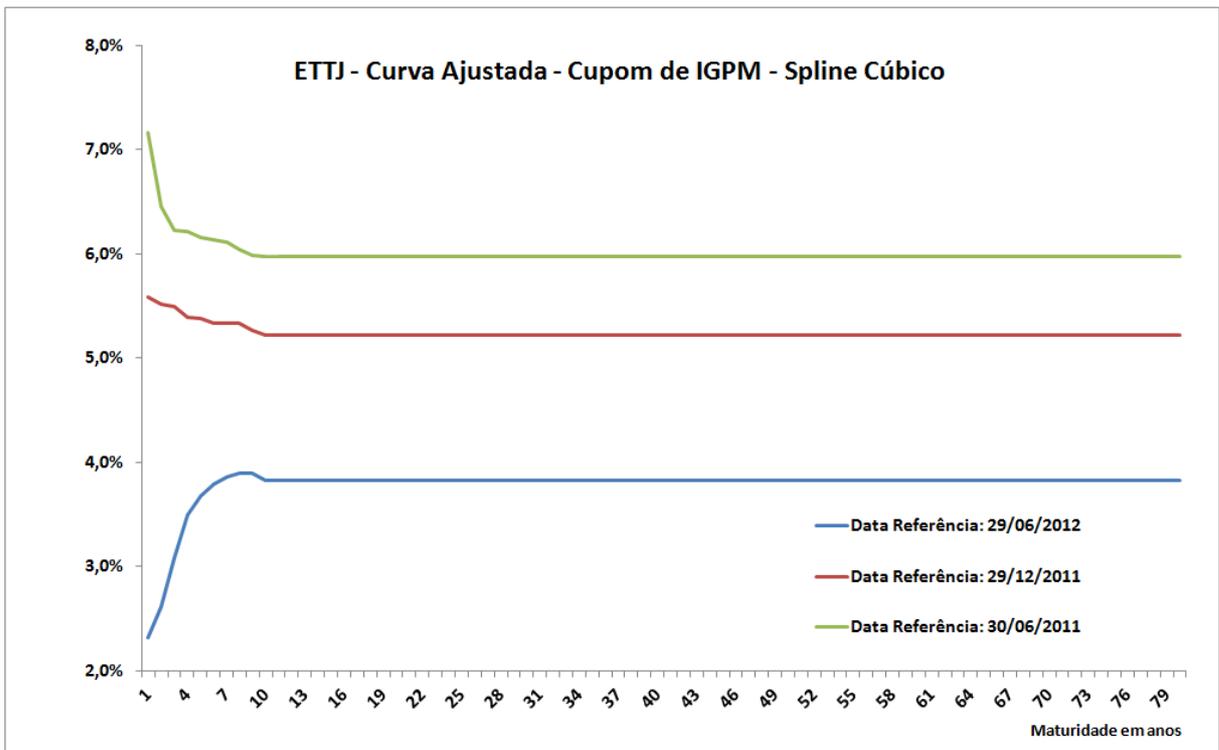


GRÁFICO 32 – Compara as curvas de juros estima por Spline Cúbico para cupom IGPM

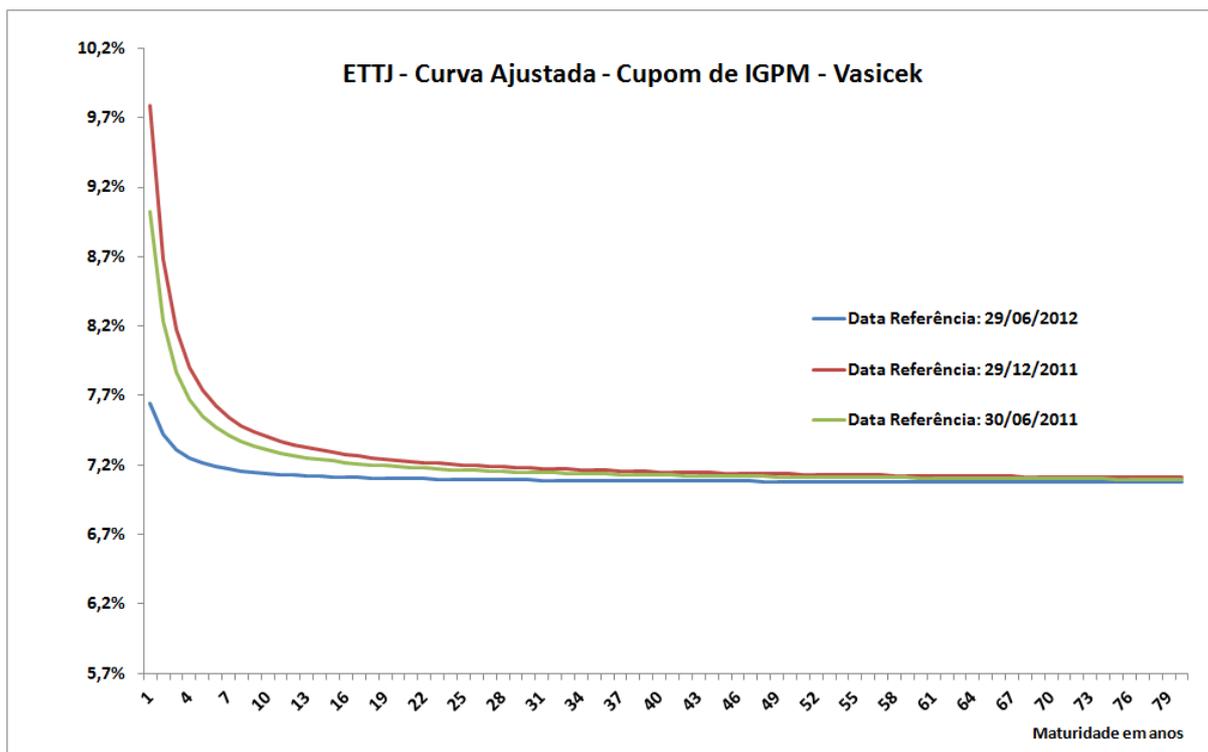


GRÁFICO 33 – Compara as curvas de juros estima por Vasicek para cupom IGPM

Ao escolhermos um modelo de cálculo e aplicá-lo sistematicamente às bases de dados formadas pelas taxas de juros cotadas em cada uma das datas de referência, isolamos o efeito da modelagem e passamos a observar apenas o impacto da escolha do momento em que a curva de juros foi construída. Os gráficos mostram nitidamente a influência da data de referência no cálculo da ETTJ. Como esperado, esta influência é mais intensa quando a modelagem é feita por *cross-section*, que foi aplicada em Svensson e *Spline* Cúbico, onde a ETTJ é estimada tendo como referência as cotações observadas em um único dia (data de referência). No caso de Vasicek que se aplicou a modelagem dinâmica em que a ETTJ é estimada tendo como referência uma série temporal das cotações observadas, a influência da data de referência também existe, porém é menos intensa. Além disso, uma simples análise visual das curvas é suficiente para se inferir que as discrepâncias observadas interferem no cálculo da Estimativa Corrente e, podem conduzir a resultados igualmente discrepantes no teste de adequação das provisões, quando performados em datas distintas.

Finalmente, a análise dos resultados indica que: 1) O resultado do Teste de Adequação de Passivo – TAP é sensível à escolha do modelo utilizado na construção da ETTJ; 2) O TAP é um valor incerto no tempo dado que a ETTJ depende dos fatores macroeconômicos vigentes na data de sua construção.

5.5 IMPLICAÇÃO PRÁTICA DOS RESULTADOS

O fato de o descolamento observado para algumas datas de referência entre as trajetórias das curvas de juros nas maturidades extrapoladas, ter impacto na comparação dos passivos descontados pelas taxas estimadas por modelos diferentes, nos leva à discussão sobre as taxas de juros estimadas para as maturidades que excedem a última maturidade observada na base de dados utilizada para modelagem da ETTJ. Esta região da curva de juros tem especial importância devido ao fato de que os contratos de seguros exigem das Seguradoras compromissos de longuíssimos prazos, sobretudo aqueles que garantem cobertura por sobrevivência que, em algumas carteiras, podem gerar fluxos de caixa centenários. Assim, a Estimativa Corrente deve ser descontada por uma curva de juros que projete taxas adequadas para esse horizonte de tempo.

Neste ponto vamos tratar da extrapolação da curva de juros, um desafio para qualquer modelo que venha a ser utilizado para estimar taxas de longo prazo. Fizemos a extrapolação das taxas dos três modelos utilizados neste trabalho de acordo com as metodologias descritas e, conforme GRÁFICO 19 a GRÁFICO 24 verificamos que para a maioria das datas de referência houve um descolamento de suas trajetórias quando entraram nesta região, indicando a falta de consenso que existe entre as metodologias no momento de estimar as taxas de longo prazo. De fato, a dificuldade em se estimar taxas além do último ponto observado (*Last Liquid Point* – LPP) é bastante discutida na literatura especializada, sendo que alguns modelos foram propostos. Dentre eles o mais citado é de Smith e Wilson que, assim como os demais, precisa ser alimentado com um parâmetro conhecido por UFR – *Ultimate Forward Rate*, uma estimativa realista para onde a taxa a termo de longuíssimo prazo deve convergir e se estabilizar. A SUSEP abordou esta questão em Franklin et al., onde reconheceu a dificuldade de se projetar taxas de longo prazo e definiu o modelo paramétrico de Svensson para construção da ETTJ. Com relação à UFR faz o seguinte comentário: “A adoção de premissas sobre essas expectativas no Brasil, para um futuro tão distante, pode ser bastante controversa” (FRANKLIN et al., 2011 . p. 32)

O regulador europeu, EIOPA, iniciou em 2004 um projeto (*Solvency II*) de revisão do regime prudencial para o mercado segurador e ressegurador da União Europeia. O principal objetivo deste projeto é desenvolver um *framework* para determinar o capital mínimo requerido para a solvência de uma Seguradora. Trata-se de um estudo bastante

abrangente que traz em seu escopo uma importante discussão sobre a extrapolação da Estrutura a Termo da Taxa de Juros livre de risco. De acordo com CEIOPS (2010), a UFR é a taxa a termo, implícita na estrutura a termo da taxa de juro livre de risco, para as maturidades muito longas que estão além do último vencimento negociado em mercado. Deve ser determinada por métodos macroeconômicos de forma a manter sua estabilidade ao longo do tempo e suas mudanças só se justificam mediante revisão de expectativas de longo prazo.

As variáveis macroeconômicas mais importantes em sua formação são: a inflação e os juros reais esperados no longo prazo, sendo que do ponto de vista teórico, pode-se considerar pelo menos mais dois componentes: o prêmio a termo nominal de longo prazo (a rentabilidade adicional que um investidor exige para trocar uma posição de curto prazo por outra de longo prazo) e o efeito convexidade nominal esperados de longo prazo (um efeito puramente técnico que representa a relação não linear que existe entre a taxa de juros e o preço de um título). A fim de se ter uma estimativa confiável e robusta da UFR, foram utilizadas as variáveis macroeconômicas inflação e juros reais esperados no longo prazo. Uma vez definidos estes parâmetros, foi utilizado o modelo de Smith e Wilson para fazer a transição do último ponto observado (LLP) para a taxa a termo de equilíbrio de longo prazo (UFR), ou seja, foi utilizada esta metodologia para modelar a extrapolação da curva de juros. Este modelo assume que a taxa a termo (*forward*) converge assintoticamente para a UFR ao longo da Estrutura a Termo da Taxa de Juros e que a velocidade desta conversão (a maturidade em que ela será atingida) pode ser controlada pela escolha adequada de um parâmetro. Os resultados obtidos para UFR foram (QUADRO 3):

Economia	Inflação esperada no longo prazo	Taxa de juros real esperada no longo prazo	UFR – <i>Ultimate Forward Rate</i>
Japão e Suíça	1%	2,2%	3,2%
Zona do Euro, Reino Unido, Noruega, Suécia, Dinamarca, Estados Unidos, Polônia e Romênia	2%	2,2%	4,2%
Turquia	3%	2,2%	5,2%

QUADRO 3 - *Ultimate Forward Rate* (UFR) adotado em CEIOPS (2010)

Nossa opinião é a de que o mercado segurador brasileiro deveria adotar uma UFR aos moldes do que foi feito no mercado europeu. A avaliação de provisões técnicas, com valores projetados num horizonte de tempo tão distante, justifica a adoção deste parâmetro que, apesar de controverso, é economicamente defensável e equaliza as premissas financeiras de longuíssimo prazo (pois trata-se de um problema que atinge de forma única todo o mercado). Os três modelos discutidos neste trabalho podem ser adaptados para receber este parâmetro: para o modelo de Svensson basta fazer o parâmetro β_l assumir a UFR e se estimar os demais parâmetros pois, como vimos na descrição do modelo, β_l é o parâmetro que governa a taxa de juros de longo prazo. Para o modelo de Vasicek o procedimento é semelhante, fazemos o parâmetro b assumir a UFR e estimamos os demais parâmetros pois, como vimos na descrição do modelo, b é a taxa de equilíbrio no longo prazo. Para o modelo de *Spline Cúbico* bastaria fazer a *flat forward* assumir a UFR.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho tem como objetivo geral discutir e aplicar a técnica de interpolação por *Spline* Cúbico, o modelo paramétrico de Svensson e o modelo de equilíbrio unifatorial de Vasicek na construção da Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) que será utilizada para descontar o fluxo de caixa projetado (Estimativa Corrente) das obrigações decorrentes dos contratos de seguros com cobertura por sobrevivência. Como objetivo específico, deseja-se conhecer e analisar a magnitude das diferenças encontradas nos resultados do Teste de Adequação de Passivo (TAP) decorrente da utilização de diferentes modelos de ETTJ, ou seja, analisar a robustez destes resultados.

O TAP foi instituído pela SUSEP (Superintendência de Seguros Privados) que, em linha com as normas internacionais de contabilidade IFRS 4 (*International Financial Reporting Standards*), busca avaliar a qualidade das provisões técnicas constituídas pelas Seguradoras, confrontando os valores contabilizados deste passivo com a Estimativa Corrente dos seus compromissos futuros descontado pela ETTJ. A Provisão Técnica é um dos principais itens de solvência das Seguradoras e o resultado do TAP é um importante indicador da qualidade desta provisão, na medida em que avalia a suficiência ou insuficiência do provisionamento. Por esse motivo, as Seguradoras precisam apresentar boa *performance* nos testes de adequação. Como a metodologia do TAP é muito sensível à ETTJ escolhida, as Seguradoras tem especial interesse em conhecer os principais modelos disponíveis para sua construção e o impacto que estas escolhas produzem nos seus testes de adequação.

Para a execução dos testes, construímos 18 curvas de juros e utilizamos 6 fluxos de caixa. As curvas de juros foram construídas de acordo com a seguinte metodologia: cada um dos três modelos (*Spline* Cúbico, Svensson e Vasicek) foi posicionado em três datas distintas (29/06/2012, 29/12/2011 e 30/06/2011) e ajustado para dois indexadores (taxas de cupom IPCA e IGPM). Os fluxos de caixa foram divididos em dois grupos que performaram dois testes distintos: 1) Fluxo de Caixa Teórico. Construímos quatro fluxos de caixa teóricos projetados por carteiras de seguros com cobertura por sobrevivência, a fim de poder tratar os diferentes perfis de pagamentos que as carteiras seguradas podem assumir. Nestes fluxos assumimos que os compromissos são indexados pelo IPCA. O teste realizado teve por objetivo avaliar a sensibilidade da Estimativa Corrente à modelagem da ETTJ de cupom IPCA; 2) Fluxo de Caixa Observado. Seleccionamos dois fluxos de caixa projetados por carteiras reais de seguros com cobertura por sobrevivência, oferecidos pela Seguradora que colaborou com este trabalho através do “Termo de Consentimento” do APÊNDICE A. Nestes

fluxos os compromissos são indexados pelo IGPM. O teste realizado teve por objetivo avaliar a sensibilidade do TAP à modelagem da ETTJ de cupom IGPM.

De acordo com a metodologia deste trabalho, realizamos a inspeção dos gráficos construídos com as curvas de juros ajustadas pelos modelos discutidos e analisamos os resultados dos testes aplicados nas variáveis, Estimativa Corrente e TAP, com o objetivo de avaliar a sensibilidade destas variáveis à escolha de um modelo para construção da ETTJ. Os resultados indicam que:

- 1) O resultado do Teste de Adequação de Passivo – TAP é sensível à escolha do modelo utilizado na construção da ETTJ;
- 2) Esta sensibilidade aumenta com a longevidade do fluxo de caixa à medida em que a Estimativa Corrente é sensível ao prazo médio dos pagamentos inerente ao fluxo;
- 3) O TAP é um valor incerto no tempo dado que a ETTJ depende dos fatores macroeconômicos vigentes na data de sua construção;
- 4) A adoção de uma taxa a termo de longuíssimo prazo (UFR) para o mercado segurador brasileiro deveria ser avaliada pelo regulador. Entendemos que a inclusão de um atrator de longo prazo nos modelos utilizados para construção da ETTJ, além de incorporar propriedades macroeconômicas importantes estabiliza as trajetórias das curvas de juros quando entram na região das maturidades extrapoladas diminuindo a discrepância dos valores descontados por modelos diferentes. De outra forma, a adoção da UFR diminui a importância da escolha do modelo utilizado na estimativa da ETTJ e oferece um discurso único para o mercado supervisionado quanto à estimativa de um parâmetro crítico da modelagem.

O presente trabalho preenche um espaço ainda pouco explorado na literatura atuarial, esclarecendo aos seus leitores as principais metodologias disponíveis para modelagem da curva de juros e o impacto de sua escolha nos resultados do Teste de Adequação de Passivo. Os elementos que formam o fio condutor desta pesquisa: taxa de juros, teste de adequação e provisões técnicas; estão inter-relacionados e fazem parte de uma estratégia do regulador do mercado que, buscando o alinhamento com as melhores práticas internacionais, estabelece regras de prudência para gestão das provisões técnicas constituídas pelas Seguradoras. A consistência desta estratégia indica que nossa linha de pesquisa é promissora e esperamos que este trabalho, que futuramente será compilado na forma de um artigo, estimule outras pesquisas que venham aprofundar os seguintes temas:

- 1) Construção da ETTJ por Modelo de Equilíbrio utilizando mais do que um fator (multifatorial), que pode dar mais flexibilidade às curvas de juros ajustadas por esta importante metodologia.
- 2) Estimativa de parâmetros por séries temporais, que pode tornar a movimentação da ETTJ, entre as datas do TAP, mais estáveis.
- 3) Adaptação dos modelos discutidos (Svensson, *Spline*, Vasicek) para receberem o parâmetro UFR e verificar a qualidade da sua conversão para taxa a termo de longuíssimo prazo.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO NACIONAL DAS INSTITUIÇÕES DO MERCADO FINANCEIRO.

Estrutura a termo das taxas de juros estimada e inflação implícita. São Paulo: Andima, 2010 (Metodologia, 04-2010).

BACKUS, D.; FORESI, S.; TELMER, C. **Discrete time models of bond pricing.** Cambridge: NBER, 1998 (Working Paper, 6736).

BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS. **Zero-coupon yield curves: technical documentation.** Basel: BIS, 2005 (Papers, 25).

BOLDER, D. J. **Affine term-structure models: theory and implementation.** Ottawa: Bank of Canada, 2001 (Working Paper, 2001-15).

BRASIL. **Lei n. 11.638**, de 28 de dezembro de 2007. Dispõe que órgãos e agências reguladoras podem adotar os pronunciamentos emitidos por entidades que tenham por objeto o estudo e a divulgação de princípios, normas e padrões de contabilidade e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, n. 249, p. 3, 28 dez. 2007.

BRIGO, D. et al. **A stochastic processes toolkit for risk management.** 2007. Disponível em: <<http://ssrn.com/abstract=1109160>> Acesso em: 31 dez. 2012.

CALDEIRA, J. F. Estimação da estrutura a termo da curva de juros no Brasil através de modelos paramétricos e não paramétricos. **Análise Econômica**, Porto Alegre, v. 29, n. 55, p. 95-122, mar. 2011.

COMMITTEE OF EUROPEAN INSURANCE AND OCCUPATIONAL PENSIONS SUPERVISORS. **Solvency II calibration paper.** Frankfurt: CEIOPS, 2010 (CEIOPS-SEC-40-10).

CHEN, R. R. **Understanding and managing interest rate risks.** Singapore: World Scientific Publishing, 1996.

COMITÊ DE PRONUNCIAMENTOS CONTÁBEIS. **CPC-11: Contratos de Seguro.** Brasília, dez. 2008. Disponível em: <http://www.cpc.org.br/pdf/CPC_11.pdf> Acesso em: 31/12/2012.

COX, J. C.; INGERSOLL, J. E.; ROSS S. A. A theory of the term structure of interest rates. **Econometrica**, Wilmington, v. 53, n. 2, p. 385–407, Mar. 1985.

CULBERTSON, J. M. The term structure of interest rates. **The Quarterly Journal of Economics**, Cambridge, v. 71, n. 4, p. 485-517, Nov. 1957.

DIEBOLD, F. X.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. **Journal of Econometrics**, Pennsylvania, v. 130, n. 2, p. 337–364, Feb. 2006.

FABOZZI, F. J. **Handbook of fixed income securities.** 5ed. New York: McGraw-Hill, 1997.

FISHER I. **Appreciation and interest**: a study of the influence of monetary appreciation and depreciation on the rate of interest with applications to the bimetallic controversy and the theory of interest. New York: American Economic Association, Aug. 1896.

FRANKLIN S. L. et al. **Interpolação e extrapolação da estrutura a termo de taxas de juros para utilização pelo mercado segurador brasileiro**. Rio de Janeiro: SUSEP, 2011.

HO, T. S. Y; LEE, S. B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. **Journal of Finance**, Pennsylvania, v. 41, n. 5, p. 1011-1029, Dec. 1986.

HULL, J. C. **Opções, futuros e outros derivativos**. 3 ed., São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1998.

HULL, J.; WHITE, A. Pricing interest rate derivative securities. **Review of Financial Studies**, Cary, v. 3, n. 4, p. 573-592, 1990.

JORDAN, C. W. **Life contingencies**. 2nd ed. Chicago: The Society of Actuaries, 1991.

LAURINI M. P.; E HOTTA L. K. **Extensões bayesianas do modelo de estrutura a termo de Diebold-Li**. São Paulo: Insper, 2007 (Working Paper 095/2007).

LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J. Common factors affecting bond returns. **Journal of Fixed Income**, New York, v. 1, n. 1, p. 54-61, Jun. 1991.

MACIEL, L. S.; GOMIDE, F. A. C.; BALLINI, R. Estimação dos parâmetros da estrutura a termo das taxas de juros utilizando um algoritmo de evolução diferencial. In: ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA, 39., 2011, Foz do Iguaçu, **Anais...** Foz do Iguaçu: ANPEC, 2011. p.1-3.

MANO, C. C. A.; FERREIRA, P. P. **Aspectos atuariais e contábeis das provisões técnicas**. Rio de Janeiro: FUNENSEG, 2009.

NELSON, C. R.; SIEGEL A. F. Parsimonious modeling of yield curves. **Journal of Business**, [S.l.], v. 60, n. 4, p. 473-489, Oct. 1987.

OLIVEIRA L. V.; PIZZINGA A. H. **Estudos sobre a ETTJ**: técnicas de estimação, escolhas da SUSEP e impacto sobre a constituição de provisões exigidas pelo TAP. Rio de Janeiro: CNSeg, 2012.

POOTER, M. D. **Examining the Nelson-Siegel class of term structure models**. Amsterdam: Tinbergen Institute, 2007 (Discussion Paper TI 2007-043/4).

ROSSI, J. W. **A estrutura a termo da taxa de juros**: uma síntese. Rio de Janeiro: IPEA, 1996 (Texto para Discussão n. 447).

SCHURMAN, G. **Vasicek bond price under the Euler discretization**. Working Paper, 2009. Disponível em: <<http://www.appliedbusinessseconomics.com/files/gvsvasprf.pdf>>. Acesso em: 31 dez. 2012.

SISTEMA DE ESTATÍSTICAS DA SUSEP. **Seguradoras**: provisões detalhadas. Rio de Janeiro: SES, 2012. Disponível em:
<<http://www2.susep.gov.br/menuestatistica/SES/principal.aspx>>. Acesso em: 31 mar. 2013.

SUSEP. Superintendência de Seguros Privados. **Circular SUSEP n. 408**, de 23 de agosto de 2010. Dispõe que as Seguradoras devem apresentar suas demonstrações financeiras adotando o padrão contábil internacional do IASB, na forma homologada pelo Comitê de Pronunciamentos Contábeis e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, n. 162, p. 27, 24 ago. 2010.

SVENSSON, L. E. O. **Estimating and interpreting forward interest rates**: Sweden 1992-1994. Cambridge: NBER, 1994 (Working Paper 4871).

VALLE, R. P. P. **Modelagem da estrutura a termo de taxa de juros real brasileira a partir do modelo de Vasicek**. 2010. 54 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Administração) - IBMEC, Rio de Janeiro, 2010.

VARGA, G. **Interpolação por cubic spline para a estrutura a termo brasileira**. São Paulo: BM&F, 2000 (Resenha BM&F, 140)

_____. Teste de modelos estatísticos para a estrutura a termo no Brasil. **RBE**, Rio de Janeiro, v. 63, n. 4, p. 361–394, out./dez. 2009.

VASICEK, O. A. An equilibrium characterization of the term structure. **Journal of Financial Economics**, Rochester, v. 5, n. 2, p. 177–188, Nov. 1997.

VIEIRA NETO, C. A. **Modelagem da estrutura a termo da taxa de juros e avaliação de contratos derivativos**. 1999. 179 f. Tese (Doutorado em Economia) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

WILMOTT, P. **Paul Wilmott on quantitative finance**. 2nd ed., West Sussex: John Willey & Sons, 2006, v.2.

WU, T. **What makes the yield curve move?** San Francisco: Federal Reserve Bank of San Francisco, 2003 (Economic Letter, 2003-15).

APÊNDICE A

Termo de Consentimento

Prezado Sr. (*nome do representante da companhia*)

A Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado, pelo seu Mestrado Acadêmico em Ciências Contábeis, está desenvolvendo um projeto de pesquisa com o objetivo de apresentar as principais metodologias disponíveis para construção da Estrutura a Termo de Taxas de Juros (ET TJ) e analisar o impacto de sua utilização no Teste de Adequação de Passivo (TAP).

De acordo com a metodologia da pesquisa, inicialmente serão discutidos alguns dos modelos mais utilizados para construção da ET TJ. Após esta discussão, utilizaremos as taxas negociadas nos pregões da BM&FBOVESPA para estimação dos parâmetros e construção da curva de juros. Posteriormente calcularemos a estimativa corrente para fluxos de caixa teóricos de diferentes maturidades. Procederemos ao mesmo cálculo para um fluxo de caixa extraído de uma carteira real.

Nosso estudo para um caso real se apoia em um fluxo de caixa projetado para as obrigações decorrentes dos contratos de seguros com cobertura por sobrevivência. A fim de preservar a identidade dos negócios da empresa colaboradora, sugerimos que a geração do fluxo seja feita pela própria empresa a partir de uma amostra de sua carteira e utilizando premissas próprias. Desta forma, nos será fornecido apenas a coluna dos valores agrupados e ordenados no tempo sem a possibilidade da extrapolação do perfil da operação ou da identificação dos participantes do plano. Informações complementares ao fluxo: Fase (Acumulação/Concessão), Produto (PGBL/VGBL/FGB), Base Técnica (Tábua/Juros/Índice), % de Excedente Financeiro e o Saldo Atual das Provisões Matemáticas, Insuficiência de Contribuição, Despesas Administrativas e de Excedente Financeiro.

Portanto, vimos por meio desta, solicitar a vossa senhoria a participação da (*nome da companhia*) no referido projeto de pesquisa, permitindo a utilização do fluxo de caixa de uma amostra de sua carteira que irá compor nosso estudo para um caso real.

Certos de podermos contribuir com o desenvolvimento da pesquisa em finanças e atuaria no Brasil, agradecemos sua participação na pesquisa e manteremos o anonimato da empresa colaboradora.

Estamos à disposição para quaisquer esclarecimentos.
Atenciosamente,

São Paulo, (*data*)

(*nome do representante da companhia*)
(*cargo do representante da companhia*)
(*nome da companhia*)

Prof. Dr. Aldy Fernandes da Silva
Professor Pesquisador do Mestrado da FECAP

Antonio Aurelio Duarte
Mestrando da FECAP